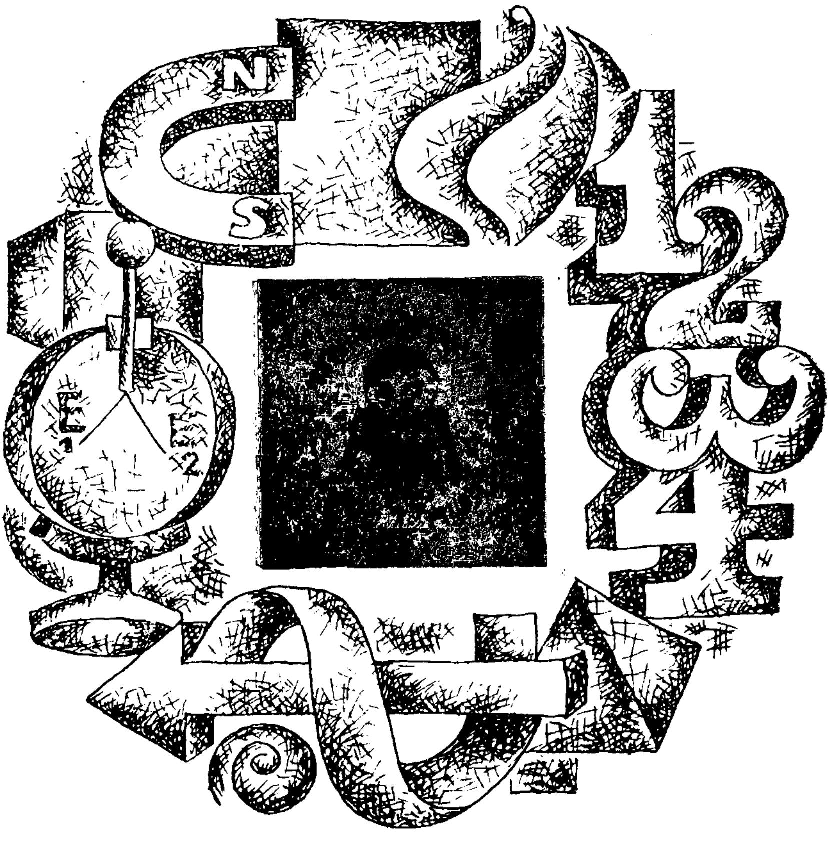
Г. И. ДРИНФЕЛЬД

КВАДРАТУРА КРУГА И ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ ЧИСЛА π



Г. И. ДРИНФЕЛЬД

КВАДРАТУРА КРУГА И ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ ЧИСЛА π

ИЗДАТЕЛЬСКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ «ВИЩА ШКОЛА»
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
КИЕВ — 1976

517.1
Д74
Б-76
УДК 511 + 512 Э-76-40843
67

Квадратура круга и трансцендентность числа π. Д р и н ф е л ь д Г. И. Издательское объединение «Вища школа», 1976, 84 с.

В книге дается известная задача «О квадратуре круга», название которой стало синонимом неразрешимости. Рассмотрены алгебраические и трансцендентные числа, диагональный метод Кантора, биномиальная формула Ньютона, число e, формула Эйлера, логарифм комплексного числа, основная теорема о симметричных многочленах, доказана трансцендентность числа π.

Рассчитана на учащихся физико-математических школ. Может быть полезна учащимся средних специальных учебных заведений и общеобразовательных школ.

Ил. 5.

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией *А. С. Макуха.*

Д $\frac{20202-207}{М211(04)-76}$ 160—76

Глава I

СУЩЕСТВОВАНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. ПОНЯТИЕ ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЛАХ

Определение 1. *Число α называется алгебраическим, если существует уравнение вида*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

с рациональными коэффициентами, для которого α является корнем.

Например, каждое рациональное число $\frac{p}{q}$ (p, q — целые числа) — алгебраическое, так как оно является корнем уравнения

$$qx - p = 0.$$

Число

$$a + \sqrt[3]{b}, \qquad (2)$$

где a и b — рациональные, также алгебраическое. Действительно, число (2) есть корень уравнения

$$(x - a)^3 - b = 0,$$

или уравнения

$$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - (a^3 + b) = 0.$$

Комплексные числа вида

$$a+bi,\quad a+\sqrt{b}i,$$

где a и b — рациональные, есть алгебраические числа, так как они являются соответственно, корнями уравнений:

$$x^2-2ax+(a^2+b^2)=0 \quad \text{и} \quad x^2-2ax+(a^2+b)=0.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно записать уравнения так:

$$(x-a)^2+b^2=0 \quad \text{и} \quad (x-a)^2+b=0.$$

Наконец, если n — целое положительное число, то

$$\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n} \tag{3}$$

является алгебраическим числом, так как, по формуле Муавра (см. стр. 50),

$$\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)^n=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$

и, следовательно, число вида (3) является корнем уравнения

$$x^n+1=0.$$

В дальнейшем допускаем, что все коэффициенты уравнения (1) — целые числа, в противном случае достаточно умножить уравнение (1) на общий знаменатель его коэффициентов, чтобы получить уравнение с целыми коэффициентами, эквивалентное данному.

Если в уравнении (1) коэффициент a_0 единица, а остальные коэффициенты — целые числа, то корень α такого уравнения называется **целым алгебраическим**. Например, если a и b — целые числа, то $a+bi$ и $a+\sqrt{b}i$ — целые алгебраические. Число $\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}$, для каждого целого n, есть целым алгебраическим.

Определение 2. *Каждое неалгебраическое число называется трансцендентным.* Иначе говоря, число α трансцендентное, если не существует ни одного уравнения вида (1) с рациональными (целыми) коэффициентами, для которого бы α было корнем.

Проверить, является ли данное число корнем определенного (заданного) уравнения вида (1), легко, но проверить то, что оно не может быть корнем ни одного уравнения вида (1), бывает трудно, а иногда и невозможно. Далее мы все же докажем элементарными средствами, что трансцендентные числа существуют.

§ 2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Понятие множества является одним из так называемых первичных понятий, то есть оно не определяется посредством других более простых понятий. Термином «множество» мы пользуемся каждый раз, когда рассматриваем объекты с некоторым общим признаком. Можно, например, говорить о множестве стульев в школе, о множестве коров на колхозной ферме, о множестве натуральных чисел, множестве всех действительных чисел и пр.

Определение 3. *Два множества называются эквивалентными (равномощными), если между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие, то есть если каждому элементу одного множества можно поставить в соответствие определенный элемент второго множества и наоборот.*

Так, например, эквивалентными являются такие множества: множество учеников в классе и множество чисел, которыми занумерованы их фамилии в классном журнале; множество положительных целых чисел и множество отрицательных целых чисел; множество окружностей с центром в данной точке и множество положительных чисел; множество точек отрезка AB, длина которого равна единице, и множество точек отрезка CD, длина которого равна наперед заданному положительному числу k.

Рассмотрим последние два примера.

Указанное множество окружностей действительно эквивалентно множеству положительных чисел, так как каждой окружности соответствует определенное положительное число — длина радиуса этой окружности и, наоборот, каждому положительному числу (при заданном центре) соответствует окружность, радиус которой равен этому числу.

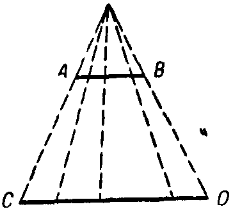


Рис. 1

Взаимно однозначное соответствие между точками двух отрезков можно установить графически, как это показано на рис. 1, или аналитически при помощи формул

$$y = a + (b - a)x, \quad x = \frac{y - a}{b - a},$$

которые являют собой взаимно однозначное соответствие между числами

$$x\,(0 \leqslant x \leqslant 1) \text{ и } y\,(a \leqslant y \leqslant b).$$

Последний пример показывает, что множество может быть эквивалентным своей части. Так, множество натуральных чисел эквивалентно множеству четных натуральных чисел: каждому натуральному числу n соответствует четное число $2n$. Отметим следующее: если множества конечные (имеют определенное число элементов), то такие множества эквивалентны тогда и только тогда, если они содержат одинаковое число элементов (докажите!).

Установление эквивалентности двух множеств является обобщением хорошо знакомой нам нумерации. Такая нумерация означает не что иное, как установление эквивалентности взаимно однозначного соответствия между элементами рассматриваемого множества и набором чисел (номеров) $1, 2, \ldots, n$.

§ 3. ИСЧИСЛИМЫЕ И НЕИСЧИСЛИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Наряду с конечными множествами, с которыми ежедневно встречается человек, наиболее простыми являются так называемые исчислимые множества.

Определение 4. *Множество M называется исчислимым, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.*

Исчислимость означает возможность *считать, нумеровать* элементы множеств. Приведем примеры исчислимых множеств: множество натуральных чисел, множество чисел $2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$; множество чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, множество чисел $1!, 2!, \ldots, n! \ldots$ Позже рассмотрим более сложные примеры исчислимых множеств, теперь же докажем существование неисчислимых множеств.

Теорема 1. *Множество действительных чисел x, которые удовлетворяют условию $a \leqslant x \leqslant b$, является неисчислимым.*

Рассмотрим лишь случаи, когда $a = 0$, $b = 1$, так как выше мы показали, что множества $x\,(a \leqslant x \leqslant b)$, $y\,(0 \leqslant \leqslant y \leqslant 1)$ эквивалентны.

Для доказательства используем тот факт, что каждое действительное число C можно записать в виде бесконечной дроби

$$C = C_0, C_1C_2 \ldots C_n \ldots$$

Такое изображение действительных чисел однозначно, если не считать запись в виде периодической дроби с девяткой в периоде (так, пишем 21,00 ..., а не 20,99 ...). Используем также и то, что две бесконечные десятичные дроби разные, если в них хотя бы два десятичных знака одинакового разряда разные. Например, $2{,}34156 \ldots \neq 2{,}34146 \ldots$

Доказательство. Будем доказывать методом «от противного». Допустим, что множество всех чисел между нулем и единицей исчислимое. Это означает, что заданное множество можно записать в виде таблицы, которая содержит каждый элемент множества:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots \\ a_2 &= 0,\ \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \beta_n \ldots \\ a_n &= 0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим теперь число

$$d = 0,\ \bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2 \ldots \bar{\alpha}_n \ldots, \tag{2}$$

где цифра $\bar{\alpha}_1$ может быть какой угодно, кроме α_1; цифра $\bar{\beta}_2$ — какой угодно, кроме β_2, и т. д. Понятно, что $0 \leqslant d \leqslant 1$ и к тому же d не равняется ни одному из чисел (1). Значит, вопреки предположению, таблица (1) не содержит каждое число между нулем и единицей. Противоречие, к которому мы пришли, указывает на справедливость теоремы.

Именно эта теорема дает возможность установить существование трансцендентных чисел.

§ 4. ТЕОРЕМЫ ОБ ИСЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВАХ

Одним из основных действий над множествами есть действие сложения (объединения).

Определение 5. *Суммой, или объединением, множеств A, B, … называется множество M, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств A, B, …, причем каждый элемент каждого из множеств A, B, … является элементом множества M.* Например, множество учеников некоторой средней школы есть объединение множества учеников 1-х, 2-х, … 10-х классов этой же школы; множество действительных чисел является объединением множеств целых чисел, которые делятся только на себя и на 1 (простых чисел), множества чисел, которые делятся на 2, множества чисел, которые делятся на 3, и т д.

Сложение (объединение) множеств обозначается символом $\cup$:

$$A \cup B,\ A \cup B \cup C,\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Теорема 2. *Сумма исчислимого множества конечных множеств есть исчислимое множество.*

Доказательство. В самом деле, пусть $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ являются конечными множествами, которые имеют, соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_k \ldots$ элементов. Обозначим элементы множества M_1 через $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$; элементы множества M_2, отличные от элементов множества M_1,— через $a_{n_1}+1, \ldots, a_{n_1}+\bar{n}_2$ ($\bar{n}_2=0$, если каждый элемент из M_2 есть элементом множества M_1, $\bar{n}_2=n_2$, если у множества M_1, M_2 нет общих элементов), элементы множества M_3 обозначим через $a_{n_1}+\bar{n}_2+1, \ldots, a_{n_1}+\bar{n}_2+\bar{n}_3$ и т. д. Теперь очевидно, что множество $(a_1, a_2, \ldots, a_m \ldots)$ исчислимое и является суммой множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n \ldots$

В качестве важного примера применения теоремы докажем следующее утверждение:

Теорема 3. *Множество рациональных, положительных и отрицательных, чисел исчислимо.*

Доказательство. Назовем *высотой* числа $\frac{a}{b}$ (a, b — целые) число $|a|+|b|$ и отметим, что множество рациональных чисел с данной высотой n исчислимо. Так, например, только числа $\pm\frac{3}{1}$, $\pm\frac{2}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$ имеют высоту 4.

Обозначим через M_1 множество рациональных чисел с высотой 1 $\left(\text{число } \frac{0}{1}\right)$, через M_2 — множество чисел с высотой 2 $\left(\text{числа } \pm \frac{1}{1}\right)$, через M_3 — множество чисел с высотой 3 $\left(\text{числа } \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{1}\right)$ и т. д. Множество всех рациональных чисел есть сумма множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ Согласно предыдущей теореме, это исчислимое множество. Следовательно, множество рациональных чисел можно пронумеровать. Действительно, множество положительных рациональных чисел можно пронумеровать по схеме, указанной на рис. 2, пропуская при обходе таблицы вдоль указанного стрелками направления уже пронумерованные числа.

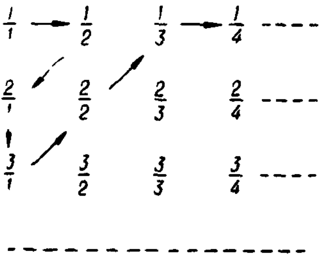


Рис . 2

Если положительные рациональные числа обозначить номерами 2, 4, 6, ..., число 0 — номером 1, а отрицательные рациональные числа — номерами 3, 5, 7, то тем самым пронумерованным окажется и все множество рациональных чисел.

Теорема 2 легко обобщается.

Теорема 4. *Сумма исчислимого (в частности, конечного) множества исчислимых множеств есть исчислимым множеством.*

Предлагаем доказать эту теорему самостоятельно, использовав для обозначения элементов множества M_n символы $a_{1n}, a_{2n}, \ldots a_{sn}, \ldots$ и назвав высотой элемента a_{sn} число $s+n$. Можно также использовать схему, подобную схеме на рис. 2.

Теорема 5. *Множество иррациональных чисел y, таких, что $a \leqslant y \leqslant b$, является неисчислимым.*

Действительно, если бы множество иррациональных чисел $y\,(a \leqslant y \leqslant b)$ было исчислимым, то сумма его с множеством рациональных чисел $x (a \leqslant x \leqslant b)$, исчислимость которого доказана (теорема 3), была бы исчислимой (теорема 4), а это невозможно (теорема 1).

§ 5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

В этом параграфе мы докажем существование трансцендентных чисел и неисчислимость их множества.

Теорема 6. *Множество алгебраических чисел исчислимо.*

Действительно, множество алгебраических чисел можно рассматривать как объединение множества M_1 алгебраических чисел — корней всех возможных уравнений первой степени с целыми коэффициентами, множества M_2 алгебраических чисел — корней всех возможных уравнений второй степени с целыми коэффициентами и т. д. На основании теоремы 4 достаточно доказать исчислимость каждого из множеств $M_1, M_2, \ldots M_n, \ldots$

Рассмотрим множество M_k корней уравнения

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k = 0 \tag{1}$$

с целыми коэффициентами. Назовем высотой этого уравнения число

$$|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_k|. \tag{2}$$

Поскольку числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ целые, то существует только конечное множество таких чисел с суммой (2), которая равна целому числу N. Уравнение (1) имеет не более чем k разных корней. Следовательно, множество алгебраических чисел — корней всех возможных уравнений k-й степени с высотой N — является конечным, а множество всех алгебраических чисел — корней уравнений k-й степени, как объединение множества корней таких уравнений с высотами $1, 2, \ldots, N, \ldots,$ — является исчислимым. Теорема доказана.

Теорема 7. *Множество трансцендентных чисел неисчислимое. Более того, неисчислимым есть множество вещественных трансцендентных чисел.*

Действительно, множество действительных чисел (оно неисчислимо) есть объединение алгебраических чисел (исчислимого множества) и множества трансцендентных чисел. Если бы это последнее множество было исчислимым, то и множество действительных чисел было бы исчислимым, что невозможно. Теорема доказана.

Это доказательство принадлежит Георгу Кантору (1873 г.)[1].

§ 6. О ПОСТРОЕНИИ ПРИ ПОМОЩИ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

Покажем, что построение отрезка длиной l при помощи циркуля и линейки возможно тогда и только тогда, когда l является алгебраическим числом, и потому невозможно, если l трансцендентное число. Прежде чем доказывать соответствующую теорему, сделаем несколько замечаний.

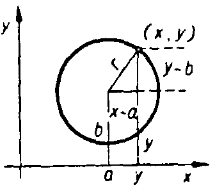


Рис. 3

Замечание I. В декартовой системе координат графиком уравнения

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

с независимыми от x, y коэффициентами является прямая, и наоборот, уравнение любой прямой в декартовой системе координат можно представить в виде (1), то есть координаты каждой точки данной прямой удовлетворяют тому же уравнению (1).

Замечание II. Из теоремы Пифагора следует, что координаты x, y каждой точки окружности с центром в точке a, b (рис. 3) и радиуса r связаны зависимостью

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \qquad (2)$$

---

[1] Г. Кантор (1845—1915), немецкий математик, основатель теории множества, родился в Петербурге, там же получил начальное образование.

то есть зависимостью вида

$$x^2 + y^2 + Kx + Ly + M = 0. \tag{3}$$

Поскольку уравнение (3) можно записать так:

$$\left(x + \frac{K}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{L}{2}\right)^2 = \frac{K^2 + L^2 - 4M}{4}, \tag{4}$$

где выражение в левой части (4) является квадратом расстояния точки (x, y) от точки $\left(-\frac{K}{2}, -\frac{L}{2}\right)$, то графиком уравнения (3) есть геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки, то есть окружность[1].

Следовательно, окончательно, в прямоугольной системе координат уравнение каждой окружности имеет вид (3) и, наоборот, графиком уравнения (3) является окружность.

Замечание III. Решение системы уравнений (1) и (3) означает нахождение точки, координаты которой удовлетворяют обоим уравнениям, то есть нахождение точки, которая лежит на прямой и окружности — точки пересечения этих линий.

Наоборот, для того чтобы аналитически найти точку пересечения прямой и окружности, нужно решить систему уравнений (1) и (3) этих линий.

Определение 5. *Действительное число α называется числом типа A_1, если оно является корнем квадратного уравнения (или уравнения первой степени) с рациональными коэффициентами; числом типа A_2, если оно является корнем квадратного уравнения (или уравнения первой степени) с действительными коэффициентами типа A_1, ..., числом типа A_k, если оно является корнем квадратного уравнения (или уравнения первой степени) с действительными коэффициентами типа A_{k-1}.*

---

[1] Мы здесь допускаем, что $l = \frac{K^2 + L^2 - 4M}{4} > 0$. Если $l = 0$, то окружность вырождается в точку; если $l < 0$, то x, y не могут иметь действительных значений, для общности говорится, что окружность *мнимая*.

Например, числа $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$ есть числа типа A_1 — они являются корнями уравнения

$$x^2-2x-1=0,$$

а числа $-2+\sqrt{3-\sqrt{2}}$, $-2-\sqrt{3-\sqrt{2}}$ есть числа типа A_2 — они являются корнями уравнения

$$x^2+4x+(1+\sqrt{2})=0. \tag{5}$$

Теорема 8. *Каждое число α типа A_k, где k определенное (конечное) число, является алгебраическим.*

Доказательство. Как известно, корни квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \tag{6}$$

записываются формулой:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{7}$$

Сформулированная теорема не требует доказательства в случае чисел типа A_1.

Числа типа A_2 являются корнями уравнения

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0, \tag{8}$$

коэффициенты которого, в свою очередь, есть корнями уравнения вида (6). Следовательно, уравнение (8) можно записать так:

$$\frac{-\beta_1\pm\sqrt{\beta_1^2-4\alpha_1\gamma_1}}{2\alpha_1}x^2+\frac{-\beta_2\pm\sqrt{\beta_2^2-4\alpha_2\gamma_2}}{2\alpha_2}x+$$

$$+\frac{-\beta_3\pm\sqrt{\beta_3^2-4\alpha_3\gamma_3}}{2\alpha_3}=0, \tag{9}$$

где α_i, $\beta_i\gamma_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ — рациональные числа.

Если в уравнении (9) уничтожить иррациональность, то получим уравнение (достаточно высокой степени) с рациональными коэффициентами. Этим мы докажем, что числа типа A_2 алгебраические. Кроме того, понятно, что эти числа, как корни уравнения (9), определяются через рациональные числа при помощи определенного числа арифметических действий и извлечения квадратных корней.

Теперь допустим, что коэффициенты уравнения (8) принадлежат к типу A_2. Рассуждая аналогично, придем к выводу, что числа типа A_3 алгебраические и т. д.

Подытоживая, скажем, что если α принадлежит к типу A_k, то α является корнем квадратного уравнения, коэффициенты которого образуются из рациональных чисел при помощи определенного числа применений арифметических действий и извлечения квадратных корней. Известными из школьного курса способами (возведения в квадрат и приведение подобных) можно уничтожить иррациональность. В таком случае будем иметь алгебраическое уравнение (пусть высокой степени) с рациональными коэффициентами, для которого α является корнем. Следовательно, α — алгебраическое.

Например, если в уравнении (5) уничтожить иррациональность, получим уравнение:

$$x^4 + 4x^3 + 18x^2 + 8x - 1 = 0.$$

Таким образом, числа $-2 + \sqrt{3 - \sqrt{2}}$, $-2 - \sqrt{3 - \sqrt{2}}$ — алгебраические.

Теорема 9. *Отрезок длины α можно построить при помощи циркуля и линейки тогда и только тогда, если α есть число типа A_k, где k — конечное число.*

Следствие. *Если α — трансцендентно, то построить отрезок длины α при помощи циркуля и линейки невозможно.*

Доказательство. *Достаточность.* Действительно, если α является корнем квадратного уравнения, то построить при помощи циркуля и линейки отрезок длиной α наверное можно, если такое построение возможно для отрезков, длинами которых являются модули коэффициентов уравнения. Отсюда делаем вывод о возможности построения отрезка длиной α, если α является числом типа A_1. Но тогда можно сказать то же самое в случае, если α есть число типа A_2, и т. д.

Необходимость. Возможность построить отрезок при помощи циркуля и линейки означает возможность найти его концы в результате проведения конечного количества прямых и конечного количества окружностей и нахождения точек пересечения проведенных линий. Иначе говоря, процесс построения отрезка при помощи циркуля и линейки есть конечной цепью построений, каждое звено которой — это проведение прямой через две данные точки и проведение окружности с заданными центром и радиусом. При этом указанные точки должны быть найдены путем предыдущих построений. Итак первым этапом построения есть проведение прямых через точки с рациональными координатами, проведение окружностей, радиусы которых и центры выражены рациональными числами, а также нахождение точек пересечения проведенных линий. Уравнения построенных прямых и окружностей будут иметь только рациональные коэффициенты, и поэтому координаты их точек пересечения будут числами типа A_1. Следующий этап построения приведет к числам типа A_2 (а возможно, A_1) и т. д. В конечном итоге, приходим к числу α, которое, таким образом, будет принадлежать к типу A_k. Теорема доказана.

§ 7. Из истории математики

На протяжении многих столетий еще в древние времена интересовались задачей о квадратуре круга: *при помощи циркуля и линейки построить квадрат, равновеликий данному кругу.*

Поскольку площадь круга с единичным радиусом равняется числу π, то задача сводится к построению отрезка длиной π. Действительно, из курса школьной геометрии известно, что построение отрезка длиной a и построение отрезка длиной a^2 одинаково возможны.

Знаменитый Леонард Эйлер (1707—1783) пришел к выводу, что задача квадратуры круга невозможна, и сделал такое предположение: число π не может быть корнем ни одного алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами. Следовательно, именно Эйлер допускал существование трансцендентных чисел и трансцендентность числа π. Кстати, обозначение отношения длины окружности к длине его диаметра через π и термин «трансцендентное число» принадлежат Эйлеру.

Предположение Эйлера о существовании трансцендентных чисел было впервые строго доказано в 1844 г. французским математиком Ж. Лиувиллем (1809—1882), а трансцендентность числа π, следовательно и невозможность квадратуры круга, доказана *лишь* в 1882 году.

Лиувилль доказал существование трансцендентных чисел, установив такой достаточный, но не необходимый признак трансцендентности:

если число α иррациональное и существуют три возрастающие последовательности целых чисел

$$p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_k,\ \ldots\ (p_k \to \infty, \text{ если } k \to \infty)$$

$$q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_k,\ \ldots\ (q_k \to \infty, \text{ если } k \to \infty)$$

$$m_1,\ m_2,\ \ldots\ m_k,\ \ldots\ (m_k \to \infty, \text{ если } k \to \infty)$$

такие, что

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{c}{q_k^{m_k}},$$

где c какое-то одинаковое для всех k число, то α — трансцендентно.

Признак Лиувилля дает возможность установить, например, трансцендентность числа

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2!}} + \frac{1}{2^{3!}} + \frac{1}{2^{k!}} + \ldots$$

Следовательно, из признака Лиувилля вытекает существование трансцендентных чисел, однако этот признак не устанавливает неисчислимости множества трансцендентных чисел. Изложенное выше канторово доказательство существования трансцендентных чисел устанавливает, что множество трансцендентных чисел неисчислимо, но поскольку это лишь доказательство существования, то неуказывается ни один признак трансцендентности и не приводится *ни один конкретный пример трансцендентного числа.*

К сожалению, признак Лиувилля применяется ограниченно. Он не используется даже при доказательстве трансцендентности чисел π и $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Трансцендентность числа e была доказана лишь в 1873 г. французским математиком Эрмитом (1822—1901), а трансцендентность числа π — в 1882 г. немецким математиком Линдеманом (1852—1939). Методы доказательства Эрмита и Линдемана специфические, и применение их при доказательстве трансцендентности чисел, отличных от e и π, мало вероятно.

Выдающиеся результаты в теории трансцендентных чисел получили советские математики А. О. Гельфонд (1906—1968), Р. О. Кузьмин (1891—1950), А. Б. Шидловский, Д. Д. Мордухай-Болтовской (1876—1952).

§ 8. Результаты А. О. Гельфонда и Р. О. Кузьмина

На II Международном конгрессе математиков (Париж, 1900 г.) один из выдающихся математиков Д. Гильберт (1862—1943), профессор Геттингенского университета, выступил с докладом, в котором сформулировал 23 проблемы, «исследование которых может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки». В то время не были еще разработаны методы решения этих проблем, лишь стоял вопрос об усовершенствовании старых методов математики и разработки новых. Очень четкое формулирование проблем, а также и авторитет Гильберта привели к тому, что внимание многих математиков было привлечено к ним.

Седьмой проблемой Гильберта была следующая:

Пусть α — любое число, которое не равно единице, а β — любое алгебраическое иррациональное число. Каким (алгебраическим или трансцендентным) будет число α^β? В частности, трансцендентны ли числа $2^{\sqrt{2}}$, e^π?

В 1929—1930 гг. А. О. Гельфонд доказал утверждение: *если α — алгебраическое число, которое не равно 0 или 1, а β — невещественное иррациональное число, которое удовлетворяет еще одному добавочному условию (т. е. будет квадратичной иррациональностью), то α^β — трансцендентно.* Это был значительный шаг в решении проблемы Гильберта, но еще не полное решение ее. Так, еще не был найден ответ на вопрос о природе чисел $2^{\sqrt{2}}$, e^π. В 1930 г. Р. О. Кузьмин показал, что требование к β быть невещественным числом лишнее, и тем самым была установлена трансцендентность числа $2^{\sqrt{2}}$.

В 1934 г. А. О. Гельфонд дал полное решение седьмой проблемы Гильберта.

Следует отметить, что ряд других проблем Гильберта советские математики также или решили полностью, или внесли значительный вклад в их исследование. Так, в 1972 г. советский ученый А. В. Погорелов (род. 1919 г., лауреат Государственной премии СССР, лауреат Ленинской премии, лауреат премии им. Лобачевского, академик АН УССР, чл.-кор. АН СССР) полностью решил четвертую проблему Гильберта [1].

Упражнения

1. Установить взаимно однозначное соответствие между точками окружности и точками прямой.

2. Последовательностью $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется множество элементов, каждому из которых отвечает номер (целое положительное число) при условии, что элемент a_2 считается следующим за a_1; a_3 — за a_2 и т. д.

Чем отличается исчислимое множество от последовательности? Можно ли сказать, что множество

$$\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

является последовательностью? Установить взаимно однозначное соответствие между элементами множества (1) и множества натуральных чисел.

3. Доказать утверждение: *из каждого бесконечного множества можно выделить исчислимое множество.*

4. Каждый элемент $a(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ множества A определяется заданием целых значений чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Доказать, что A — исчислимое множество.

5. В теории множеств употребляются такие обозначения:
$a \in A$ (a есть элемент множества A), $A \subset E$ (множество A есть часть множества E, A — подмножество), $\overline{A}$ (дополнение множества A до E, то есть $A \subset E$, $\overline{A}$ состоит из всех элементов E, которые не принадлежат A), $A \cap B$ (пересечение множеств A, B — множество всех общих элементов множеств A, B), $\varnothing$ (пустое множество).

---

[1] Демидов С. С. Проблемы Гильберта. М., «Знание», 1969 (Серия «Математика, кибернетика», № 12); Проблемы Гильберта. Под ред. Г. С. Александрова. М., «Наука», 1969.

Доказать равенства:

1) если $A \subset B: A \cap B = A,\ A \cap B \cap C = A \cap C,\ A \cup B \cup C = B \cup C$;

2) если $A \subset B,\ B \subset C: A \cap B \cap C = A,\ A \cup B \cup C = C$;

3) $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$.

4) $A \cap (B \cup C) \cup (A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

5) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B,\ \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$;

6) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \varnothing$.

6. Проверить, что число

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad (1)$$

является корнем уравнения

$$x^3 + px + q = 0. \qquad (2)$$

Примечание. Формула (1) называется формулой Кардана (итальянский математик, 1501—1576 гг.). Если учесть, что кубический корень из числа имеет три разные значения, то, согласно формуле (1), получим 9 значений, из которых только три являются корнями уравнения (2). Сделать вывод об алгебраичности числа (1).

7. Пусть α, β есть, соответственно, корнями уравнений

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0 \text{ и } x^2 + p_2x + q_2 = 0.$$

Доказать, что $\alpha + \beta$ является корнем уравнения

$$x^4 + 2(p_1 + p_2)x^3 + (p_1^2 + 3p_1p_2 + p_2^2 + 2q_1 + 2q_2)x^2 +$$

$$+ (p_1 + p_2)(2q_1 + 2q_2 + p_1p_2)x + (q_2p_2^2 + q_1p_1^2 - 4q_1q_2) = 0.$$

Найти уравнения четвертой степени, в которых корнями буду $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$.

Указания. 1. Сущность упражнения: если α и β есть алгебраические числа, то при добавочном допущении, что они являются корнями квадратных уравнений с рациональными коэффициентами, вытекает, что числа $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ также алгебраические (позже выяснится, что это допущение излишне).

2. Пусть вторыми корнями заданных уравнений есть, соответственно, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$. Составить уравнение с корнями $(\alpha + \beta)$, $(\overline{\alpha} + \beta)$, $(\alpha + \overline{\beta})$, $(\overline{\alpha} + \overline{\beta})$.

8. Доказать утверждение: *если a отличное от нуля алгебраическое число — то a^{-1} тоже алгебраическое число*, следовательно, *и частное двух алгебраических чисел — алгебраическое число.*

9. Правильно ли утверждение: сумма двух трансцендентных чисел есть трансцендентным числом?

Глава II

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 1. БИНОМИАЛЬНАЯ ФОРМУЛА НЬЮТОНА

Хорошо известные формулы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b^2 + 3ab + b^3 \quad (1)$$

есть отдельными случаями формулы общего вида

$$(a+b)^m = a^m + C_m^1 a^{m-1} b + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \dots + \\ + C_m^k a^{m-k} b^k + \dots + b^m, \quad (2)$$

где m — целое положительное число.

Выведем правило вычисления так называемых **биномиальных коэффициентов**

$$C_m^1, \ C_m^2, \ \dots, \ C_m^k, \ \dots, \ C_m^{m-1}. \quad (3)$$

Кое-что об этих коэффициентах можно сказать сразу: поскольку в левой части равенства (2) a и b равноправны (говорят, что выражение симметрично относительно a, b), то они должны быть равноправными и в правой части равенства. Следовательно,

$$C_m^1 = C_m^{m-1}, \ C_m^2 = C_m^{m-2}, \ \dots, \ C_m^k = C_m^{m-k},$$

то есть в ряду биномиальных коэффициентов (3) коэффициенты, равноотстоящие от концов ряда, равны между собой. Поскольку

$$(a+b)^m = (a+b)(a+b) \ \dots \ (a+b),$$

то можно сделать вывод, что коэффициенты (3) целые и положительные. Докажем теперь справедливость формулы

$$C_m^k = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} = \frac{m\,(m-1)\,\ldots\,(m-k+1)}{1.\,2.\,3\,\ldots\,k}, \tag{4}$$

где $p! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \,\ldots\, p$.

При $m = 2$ имеем:

$$C_2^1 = \frac{2!}{1!\,1!} = 2.$$

Принимая во внимание первую из формул (1), убеждаемся, что при $m = 2$ формула (4) имеет место, а поскольку $(a+b)^{m+1} = (a+b)^m\,(a+b)$, то целесообразно применить метод полной индукции. Укажем сперва, что из формулы (4) вытекает такое равенство:

$$C_m^s + C_m^{s+1} = C_{m+1}^{s+1}. \tag{5}$$

Действительно,

$$C_m + C_m^{s+1} = \frac{m!}{s!\,(m-s)!} + \frac{m!}{(s+1)!\,(m-s-1)!} =$$

$$= \frac{m!\,[(s+1)+(m-s)]}{(s+1)!\,[(m+1)-(s+1)]!} = \frac{(m+1)!}{(s+1)!\,[(m+1)-(s+1)]!} = C_{m+1}^{s+1}.$$

Допуская, что формула (2) справедлива при значениях (4) ее коэффициентов, докажем, что

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + C_{m+1}^2 a^{m-1} b^2 + \ldots +$$
$$+ C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^2 + \ldots + b^{m+1}$$

при том же правиле (4) вычисления коэффициентов. Действительно,

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m\,(a+b) = (a^m + C_m^1 a^{m-1} b +$$
$$+ C_m^2 a^{m-2} b^2 + \ldots + C_m^{k-1} a^{m-k+1} b^{k-1} +$$
$$+ C_m^k a^{m-k} b^k + \ldots + b^m)\,(a+b).$$

Перемножая соответственно многочлены и приводя подобные члены, имеем:

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + (C_m^1 + 1)\, a^m b + \ldots + (C_m^{k-1} + \\ + C_m^k)\, a^{(m+1)-k} b^k + \ldots + b^{m+1}.$$

Согласно формуле (5) получим:

$$C_m^{k-1} + C_m^k = C_{m+1}^k, \quad C_m^1 + 1 = m + 1 = C_{m+1}^1.$$

Следовательно,

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + C_{m+1}^2 a^{m-1} b^2 + \ldots + \\ + C_{m+1}^k a^{(m+1)-k} b^k + \ldots + b^{m+1},$$

что и требовалось доказать.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ

Напомним несколько определений.

Определение 1. *Число A называется пределом числовой последовательности*

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots, \tag{1}$$

если для любого, как угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует число N такое, что неравенство

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

имеет место для каждого номера n, начиная с N $(n \geqslant N)$.

Символически это записывается так:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Определение 2. *Число A называется пределом функции $f(x)$ (при $x = a$), если для любого, как угодно малого числа ε существует положительное число η такое, что неравенство*

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{1}$$

действительно для каждого значения x, которое удовлетворяет условию

$$|x - a| < \eta.$$

Символически это записывается так:

$$A = \lim_{x=a} f(x), \quad A = \lim_{x \to a} f(x).$$

Замечание. Записи

$$A = \lim_{x \to \infty} f(x), \quad A = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

означают, что неравенство (1′) справедливо, соответственно, при

$$x > M, \quad x < -M,$$

где M — положительное число, определенное заданным числом ε.

В школьном курсе математики доказываются следующие теоремы:

1. *Если существуют пределы слагаемых и число слагаемых фиксировано, то существует предел суммы, которая равняется сумме пределов слагаемых.* То есть:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n + \ldots + k_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n + \ldots + \lim_{n \to \infty} k_n,$$

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x) + \\ + \ldots + \lim_{x \to a} f_n(x).$$

2. Если существуют пределы сомножителей и число их фиксировано, то существует предел произведения, который равняется произведению пределов сомножителей:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n b_n \cdot \ldots \cdot k_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n \cdot \ldots \cdot \lim_{n \to \infty} k_n,$$

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_m(x) = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x) \times \\ \times \ldots \cdot \lim_{x \to a} f_m(x).$$

В частности, если α — постоянная величина, то

$$\lim_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n,\quad \lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to a} f(x).$$

3. Если существуют пределы числителя и знаменателя, причем предел знаменателя отличается от нуля, то существует предел дроби, который равен пределу числителя, деленного на предел знаменателя. То есть:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n},\quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0,$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)},\quad \lim_{x\to a} \varphi(x) \neq 0.$$

4. *Предел величины, которая находится между двумя величинами, имеющими общий предел A, существует и равен A. То есть если для всех значений n, начиная с некоторого,*

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$$

и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = A,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} c_n = A.$$

Аналогично, если для каждого значения x, достаточно близкого к a,

$$f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant F(x)$$

и

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} F(x) = A,$$

то

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = A.$$

5. Если x_n ограниченная величина ($x_n < M$) и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Для дальнейшего изложения нам потребуется утверждение: *для каждого значения x, независимого от n, имеет место равенство*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть r — целое число и $r + 1 > 2|x|$. Так как

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^r}{r!} \cdot \frac{|x|^{n-r}}{(r+1)(r+2)\dots n} < \frac{|x|^r}{r!} \cdot \frac{|x|^{n-r}}{(r+1)^{(n-r)}} =$$

$$= \frac{|x|^r}{r!} \left(\frac{|x|}{r+1}\right)^{n-r}$$

и $|x| < \frac{r+1}{2}$, то

$$\frac{|x|^n}{n!} < \frac{|x|^r}{r!} \cdot \frac{1}{2^{n-r}}.$$

Величина $\frac{|x|^r}{r!}$ не зависит от n, а $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-r}} = 0$.

Поэтому $$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^r}{r!} \cdot \frac{1}{2^{n-r}} = 0.$$

Следовательно, и $$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Докажем еще несколько теорем из теории пределов, которые будут использованы в дальнейшем.

Теорема 1. *Каждая ограниченная сверху (снизу) неубывающая (возрастающая) последовательность имеет предел.*

Ограниченность последовательности

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{3}$$

сверху означает существование числа M такого, что

$$a_n < M, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Аналогично определяется ограниченность снизу.

Последовательность (3) называется **неубывающей**, если

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots,$$

и **невозрастающей**, если

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots.$$

Доказательство. При доказательстве этой теоремы используется теория иррациональных чисел. Поскольку распространены два построения теории иррациональных чисел, мы даем и два доказательства теоремы, допуская, для определенности, последовательность неубывающей, ограниченной сверху.

I (*на основании дедекиндовой теории иррациональных чисел — теории сечений*). Назовем **правым классом** B множество рациональных чисел, из которых каждое число больше любого элемента последовательности (3), а **левым классом** A — множество остальных рациональных чисел, то есть множество рациональных чисел, каждое из которых не больше хотя бы одного элемента последовательности (3). Поскольку последовательность (3) ограничена сверху, то оба класса существуют ($A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$). Понятно, что каждое число класса A меньше любого числа из класса B и, кроме того, каждое рациональное число принадлежит одному из классов A или B.

Следовательно, имеем сечение в совокупности рациональных чисел, то есть существует единственное вещественное число α, которое не меньше каждого числа из A и не больше каждого числа из B. Докажем, что

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Действительно, пусть задано любое $\varepsilon > 0$. Тогда в последовательности (3) найдется такой элемент a_k, что

$$\alpha - a_k < \varepsilon, \tag{4}$$

так как если бы такого элемента не было, то мы имели бы

$$\alpha - a_k \geqslant \varepsilon, \ a_k \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha$$

для каждого значения k. Но в таком случае не число α отделяло бы класс A от класса B, что противоречит определению числа α. Следовательно, неравенство (4) справедливо. Поскольку последовательность (3) неубывающая, то при $n \geqslant k$

$$a_n \geqslant a_k$$

и из (4) вытекает, что

$$\alpha - a_n < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha.$$

II (*на основании определения вещественных чисел как бесконечных десятичных дробей*). Будем считать, что последовательность (3) ограничена сверху целым числом M (в противном случае мы заменили бы M наиболее близким большим целым числом).

Пусть m — самое большое целое число, меньше a_1. Следовательно,

$$m \leqslant a_n \leqslant M, \ n = 1, 2, 3 \ldots.$$

Рассмотрим числа

$$m, m+1, \ldots, M-1, M.$$

Пусть $c+1$ первое из этих чисел, которое не меньше каждого a_n (в крайнем случае, $c+1 = M$). Выходит, найдется элемент a_k такой, что

$$a_k \geqslant c.$$

Но в таком случае при $n \geqslant k$ будем иметь $a_n \geqslant c$. Окончательно:

$$c \leqslant a_n \leqslant c+1 \text{ при } n \geqslant k.$$

Теперь рассмотрим числа:

$$c;\ c+0{,}1 = c,\ 1;\ c+0{,}2 = c,\ 2;\ \ldots;\ c,\ 9;\ c+1.$$

Рассуждая аналогично, придем к выводу, что существуют числа $c,\ \alpha_1 = c+0,\ \alpha_1;\ c,\ \overline{\alpha_1+1} = c,\ \alpha_1+0{,}1$ и число k_1 такие, что

$$c,\ \alpha_1 \leqslant a_n \leqslant c,\ \overline{\alpha_1+1} \text{ при } n \geqslant k_1.$$

Рассматривая числа

$$c,\ \alpha_1;\ c,\alpha_1+0{,}01 = c,\ \alpha_1 1;\ c,\ \alpha_1\ 2;\ \ldots\ c,\ \alpha_1\ 9;\ c,\ \alpha_1+1,$$

получим такие числа $c,\ \alpha_1\alpha_2$ и $c_1\alpha_1\overline{\alpha_2+1}$, что

$$c,\ \alpha_1\alpha_2 \leqslant a_n \leqslant c,\ \alpha_1\overline{\alpha_2+1} \text{ при } n \geqslant k_2$$

и т. д.

Понятно, что таким способом определим бесконечную десятичную дробь

$$a = c,\ \alpha_1{,}\alpha_2\ \ldots\ \alpha_m\ \ldots,$$

для которой

$$c,\ \alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \alpha_m \leqslant a \leqslant c,\ \alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \overline{\alpha_m+1},$$

$$c,\ \alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \alpha_m \leqslant a_n \leqslant c,\ \alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \overline{\alpha_m+1} \text{ при } n \geqslant k_m.$$

Следовательно,

$$|a_n - a| \leqslant c,\ \alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \overline{\alpha_m+1} - c,\alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \alpha_m = \frac{1}{10^m} \text{ при } n \geqslant k_m.$$

Отсюда при достаточно большом m будем иметь:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Окончательно:

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Пример. Последовательность

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ldots$$

неубывающая. Поскольку

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+2} = 2,\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} < \sqrt{2+\sqrt{2+2}} = 2, \ldots,$$

то заданная последовательность ограничена сверху, следовательно, она имеет предел a. Найдем этот предел. Обозначим n-й элемент последовательности через a_n. Тогда

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n},$$

$$a_{n+1}^2 - a_n - 2 = 0.$$

Если $n \to \infty$, то

$$a^2 - a - 2 - 0,$$

откуда $a = 2$ ($a = -1$ отбрасываем).
Следовательно,

$$a = 2.$$

Теорема 2. *Если $a > 0$ и последовательность рациональных чисел $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ имеет предел нуль, то есть*

$$\lim_{n \to \infty} h_n = 0,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} a^{h_n} = 1. \qquad (5)$$

Рассмотрим сначала частный случай:

$$h_m = \frac{1}{m}.$$

Пусть $a > 1$. В таком случае

$$a^{\frac{1}{m}} = 1 + \alpha_m \quad \text{при} \quad \alpha_m > 0. \tag{6}$$

Согласно формуле Ньютона,

$$a = (1 + \alpha_m)^m = 1 + m\alpha_m + \ldots,$$

где остальные слагаемые больше нуля. Следовательно,

$$a > 1 + m\alpha_m, \quad \alpha_m < \frac{a-1}{m}, \quad \lim_{m \to \infty} \alpha_m = 0.$$

Из равенства (6) имеем:

$$\lim_{m \to \infty} a^{\frac{1}{m}} = 1.$$

Если $a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и поэтому

$$\lim_{m \to \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{m}} = 1.$$

Из теоремы о пределе дроби вытекает:

$$\lim_{m \to \infty} a^{\frac{1}{m}} = \lim_{m \to \infty} \left[1 : \frac{1}{a^{\frac{1}{m}}}\right] = \frac{1}{1} = 1.$$

При $a = 1$ утверждение очевидно. Окончательно, для всякого $a > 0$ имеем:

$$\lim_{m \to \infty} a^{\frac{1}{m}} = 1.$$

Докажем теперь равенство (5). Пусть

$$|h_n| = \frac{p_n}{q_n}$$

и m — целое число такое, что

$$m \leqslant \frac{q_n}{p_n} \leqslant m + 1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{m+1} \leqslant |h_n| \leqslant \frac{1}{m}$$

и если $n \to \infty$, то и $m \to \infty$. Таким образом, при $h_n > 0$ имеем:

$$a^{\frac{1}{m+1}} \leqslant a^{h_n} \leqslant a^{\frac{1}{m}} \text{ при } a > 1,$$

$$a^{\frac{1}{m+1}} \geqslant a^{h_n} \geqslant a^{\frac{1}{m}} \text{ при } a < 1.$$

Отсюда, на основании равенства (7) и теоремы о пределе величины, заключенной между двумя величинами, имеем:

$$\lim_{n \to \infty} a^{h_n} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Случай $h_n < 0$ предлагаем рассмотреть самому читателю.

§ 3. СТЕПЕНЬ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Считая уже известными определения величины $a^{\frac{m}{n}}$, где m, n — целые числа, то есть, считая уже известным понятие степени с рациональным показателем, введем понятие степени с иррациональным показателем.

Поскольку иррациональное число можно, с как угодно малой погрешностью, заменить приближенно рациональным числом (например, $a, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots \approx a, \alpha_1 \ldots \alpha_{14}$ с погрешностью, меньшей $\frac{1}{10^{14}}$), то совершенно естественно принять такое определение:

Определение 3. *Пусть α — иррациональное число и*

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \tag{1}$$

любая последовательность рациональных чисел, для которой

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \alpha. \tag{2}$$

Тогда

$$a^{\alpha}=\lim_{n\to\infty} a^{r_n}. \tag{3}$$

Такое определение можно принять, лишь доказав существование предела и независимость его от выбора последовательности (1), надо только, чтобы имело место равенство (2).

Если последовательность (1) неубывающая, то последовательность

$$a^{r_1},\ a^{r_2},\ \ldots,\ a^{r_n},\ \ldots \tag{4}$$

при $a\geqslant 1$ (и $r_n>0$, что не является ограничением) не убывает, а при $a\leqslant 1$ — не возрастает. В первом из указанных случаев

$$a^{r_n}\leqslant a^{r},$$

где r — любое рациональное число, больше α, а во втором

$$a^{r_n}\geqslant a^{r}.$$

Итак, если последовательность (1) неубывающая, то последовательность (4) удовлетворяет условию теоремы 1 и поэтому имеет предел:

$$\lim_{i\to\infty} a^{r_n}=A. \tag{5}$$

Докажем теперь, что для любой последовательности рациональных чисел

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots,$$

такой, что

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\alpha, \tag{6}$$

существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n}=A.$$

Действительно, из (2) и (6) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}(r_n - s_n) = \lim_{n\to\infty} r_n - \lim_{n\to\infty} s_n = 0.$$

Но тогда, на основании теоремы 2 (§ 2) и равенства (5):

$$\lim_{n\to\infty}(a^{r_n} - a^{s_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}(1 - a^{s_n - r_n}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty}(1 - a^{r_n - s_n}) = 0.$$

Отсюда, опять прибегая к равенству (5), имеем:

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = A.$$

Итак, мы обосновали корректность определения:

$$a^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Замечание 1. Рациональность чисел s_n допускалась лишь для того, чтобы можно было рассматривать a^{s_n}. Поэтому, если определение a^{α} уже обосновано, то можно утверждать, что если

$$\lim s_n = \alpha,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = a^{\alpha},$$

не допуская, что s_n обязательно рациональные числа.

Замечание 2. Для иррациональных показателей сохраняется основное свойство: $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$(докажите самостоятельно!).

§ 4. НЕПЕРОВО ЧИСЛО

Так называется предел последовательности

$$1 + 1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ldots . \quad (1)$$

Л. Эйлер ввел для этого предела обозначение «e». Поэтому, по определению,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (2)$$

если n принимает целые положительные значения. Отметим, что в высшей математике это число встречается так же часто, как и число π. Определение (2) имеет смысл только после того, как будет доказано существование предела. Для этого, применяя теорему 1 (§ 2), достаточно доказать, что последовательность (1) возрастающая и ограничена сверху. Поскольку n — целое положительное, то, согласно биномиальной формуле Ньютона, имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\times$$

$$\times\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^n} = 1+1+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1.2.3.}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{1.2.\ \ .\ (n-1)n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad (3)$$

— всего $(n+1)$ слагаемое.

Так же

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1+1+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{12\ \ldots\ n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{1.2\ \ldots\ n(n+1)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \qquad (4)$$

— всего $n+2$ слагаемых.

Сравнивая (3) и (4), видим, что первые $n+1$ слагаемые выражения (4) соответственно больше слагаемых выражения (3) и, кроме того, есть еще одно, больше нуля, слагаемое. Следовательно,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

то есть последовательность (1) возрастающая. Из равенства (3) получим такое неравенство:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n} <$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}.$$

Следовательно,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

То есть последовательность (1) ограничена сверху. Таким образом, существование числа e доказано.

Замечание. Из равенства (3) и последнего неравенства имеем:

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Отсюда

$$2 \leqslant e \leqslant 3.$$

Позже покажем, что

$$e = 2{,}718\,281\,828\ \ldots$$

Вычисляя пределы, часто прибегают к такой теореме:

Теорема 3. *Если последовательность*

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m,\ \ldots$$

такая, что

$$|u_m| \to \infty \text{ при } m \to \infty,$$

то

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{u_m}\right)^{u_m} = e. \qquad (5)$$

Для доказательства рассмотрим сначала случай, когда $u_m > 0$. Пусть n — ближайшее к u_m число, не больше u_m. Тогда

$$n \leqslant u_m \leqslant n+1, \; n \to \infty \text{ при } m \to \infty,$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < (1+u_m)^{u_m} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{6}$$

Но

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right] = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.$$

Принимая во внимание последние два равенства, мы из равенства (6) получим равенство (5).

Если $u_m < 0$, то, приняв $u_m = -v_m$, получим $v_m \to 0$, и тогда

$$\left(1+\frac{1}{u_m}\right)^{u_m} = \left(1-\frac{1}{v_m}\right)^{-v_m} = \left(\frac{v_m-1}{v_m}\right)^{-v_m} =$$

$$= \left(\frac{v_m}{v_m-1}\right)^{v_m} = \left(1+\frac{1}{v_m-1}\right)^{v_m-1}\left(1+\frac{1}{v_m-1}\right). \tag{7}$$

Поскольку, как доказано, при $v_m > 0$

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{v_m-1}\right)^{v_m-1} = e,$$

то из равенства (7) получим равенство (5). Эту теорему можно сформулировать иначе.

Пусть $x \to 0$, пробегая любую последовательность значений. Тогда

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{8}$$

Действительно, если x пробегает последовательность значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_n \to 0$,

то, приняв $x_n = \frac{1}{u_n}$, из равенства (5) будем иметь равенство (8).

Можно также показать, что если a не зависит от x, то

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\right]^a = e^a. \qquad (9)$$

§ 5. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ. НАТУРАЛЬНЫЕ ЛОГАРИФМЫ

Определение. *Функция a^x называется показательной, где $a > 0$, $a \neq 1$, а x — любое вещественное число.* В частности, e^x называется экспоненциальной функцией (иногда это записывают так: $\exp x$).

Показательная функция определена для каждого вещественного x — ведь мы определили степень с иррациональным показателем.

Важным классом функций являются так называемые непрерывные функции.

Определение. *Функция $f(x)$ называется непрерывной при $x = x_0$ (в точке $x = x_0$), если существует $\lim_{x\to x_0} f(x)$ и*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

то есть если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\eta > 0$ такое, что

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

для каждого значения x, которое удовлетворяет условию

$$|x - a| < \eta.$$

Теорема 4. Показательная функция непрерывная при каждом значении аргумента.

Действительно,

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1). \qquad (1)$$

Возьмем как угодно малое рациональное число h, так чтобы для наперед заданного $\varepsilon > 0$ имело бы место неравенство

$$|a^h - 1| < \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}.$$

На основании теоремы 2 (§ 2) это возможно. Для каждого значения x, которое удовлетворяет условию

$$|x - x_0| < h,$$

из равенства (1) имеем:

$$|a^x - a^{x_0}| < a^{x_0}(a^h - 1) < \varepsilon.$$

Следовательно, непрерывность a^x доказана.

Логарифмы, вычисленные при основании e, называются натуральными и обозначаются символом $\ln N$. Согласно определению понятия логарифма, имеем:

$$a^{\log_a N} = e^{\ln N}.$$

Отсюда

$$\log_a N \cdot \ln a = \ln N; \ \log_a N = \ln N \cdot \log_a e.$$

Итак,

$$\log_a N = \frac{\ln N}{\ln a}; \ \ln N = \frac{\log_a N}{\log_a e}$$

— формулы, которые устанавливают связь между логарифмами, вычисленными при основании a и натуральными логарифмами.

§ 6. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ e^x В СТЕПЕННОЙ РЯД. ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ ЧИСЛА e

Арифметическое понятие суммы обобщается на случай бесконечного числа слагаемых.

Определение 6. *Если числовая последовательность*

$$a_1, \ a_1 + a_2, \ a_1 + a_2 + a_3, \ \ldots, \ a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ \ldots$$

имеет предел a, то пишут

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

и говорят, что *число a представлено в виде ряда*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{1}$$

или, что *ряд* (1) *сходится и его суммой является число a.*

Определение 7. *Если при некотором значении x последовательность многочленов*

$$a_0, \ a_0 + a_1x, \ a_0 + a_1x + a_2x^2, \ \ldots, \ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \\ + \ldots + a_nx^n, \ \ldots$$

имеет предел $f(x)$, то говорят, что при этом значении x степенной ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

сходится и суммой этого ряда есть $f(x)$.

Это записывают так:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{2}$$

и говорят, что $f(x)$ разложена в степенной ряд. На основании равенства (2), можно записывать приближенные равенства

$$f(x) \approx a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,$$

погрешность которых приближается к нулю при $n \to \infty$.

Теорема 5. *Для каждого значения* x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим лишь случай, когда $x > 0$.

На основании равенства (9), § 4, имеем

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x. \tag{4}$$

Применяя формулу Ньютона, получаем:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{x^2}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots r} \times$$

$$\times \frac{x^r}{n^r} + \ldots + \frac{x^n}{n^n} = 1 + v_1 + v_2 + \ldots + v_r + \ldots + v_n, \tag{5}$$

где

$$v_r = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots r} \cdot \frac{x^r}{n^r} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots$$

$$\left(1 - \frac{r-1}{n}\right)\frac{x^r}{r!}.$$

Поскольку

$$v_{r+s} = v_r \frac{\left(1 - \frac{r}{n}\right)\left(1 - \frac{r+1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{r+s-1}{n}\right)}{(r+1)(r+2)\ldots(r+s)} x^s,$$

то при $x > 0$ будет иметь место неравенство

$$v_{r+s} < v_r \left(\frac{x}{r+1}\right)^s. \tag{6}$$

Пусть $n > r > x$. Тогда из неравенства (6) получим:

$$v_{r+1} + v_{r+2} + \ldots + v_n < v_r \left[\frac{x}{r+1} + \left(\frac{x}{r+1}\right)^2 + \ldots +\right.$$

$$+\left(\frac{x}{r+1}\right)^{n-r}\right] < v_r\left[\frac{x}{r+1}+\left(\frac{x}{r+1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{r+1}\right)^{n-r}+\right.$$

$$\left.+\ldots\right]=\frac{x}{r+1-x}v_r. \qquad (7)$$

Из равенства (5) и неравенства (7) имеем:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - v_r\frac{x}{r+1-x} < 1+v_1+v_2+\ldots+$$

$$+v_r < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \qquad (8)$$

Зафиксировав r, будем неограниченно увеличивать n $(n \to \infty)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} v_r = \frac{x^r}{r!}$$

и из соотношений (4) и (8) вытекает, что

$$e^x - \frac{x^{r+1}}{r!\,(r+1-x)} < 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^r}{r!} < e^x.$$

Последние неравенства имеют место для каждого r. Пусть $r \to \infty$.
Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{}+\ldots+\frac{x^2}{r!}\right)=e^x,$$

или

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^r}{r!}+\ldots,$$

что и требовалось доказать.

Используя равенство (3), вычислим приближенно число e. Так, при $x=1$ имеем:

$$e = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\delta_n,$$

где

$$\delta_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right\} <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right\} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)!\,(n+1)}. \tag{9}$$

В частности,

$$\delta_9 < \frac{11}{10!\;10} = \frac{11}{3\,628\,800} < \frac{1}{300\,000} < 0{,}000\,01.$$

Итак, с точностью до 0,000 01 имеем:

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{9!} \approx 2{,}71828.$$

Теорема 6. *Число e — иррациональное.* Допустим противоположное. Пусть

$$e = \frac{p}{q}, \text{ где } p \text{ и } q \text{ — целые числа.}$$

Тогда при $x = 1$ из равенства (3) имеем:

$$\frac{p}{q} - \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{q!}\right) =$$

$$= \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \ldots = \delta_q.$$

Отсюда, при умножении на $q!$, получим:

$$p(q-1)! - \left(2 \cdot q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \ldots + \frac{q!}{q!}\right) = q!\,\delta_q. \tag{10}$$

На основании (9),

$$q!\,\delta_q < q!\,\frac{q+2}{(q+1)!\,(q+1)} = \frac{q+2}{(q+1)^2} < 1.$$

Итак, в правой части равенства (10) имеем правильную дробь, что невозможно, поскольку левая часть того же равенства есть целое число. Таким образом, мы пришли к противоречию, и наше допущение неправильно, то есть e — иррациональное.

Теперь докажем, что

$$\lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{e^x} = 0 \tag{11}$$

для каждого конечного m. Имеем:

$$\frac{x^m}{e^x} = \frac{x^m}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} + \ldots} <$$

$$< \frac{x^m}{\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}} = \frac{(m+1)!}{x}.$$

Число m, а следовательно $(m+1)!$, конечное. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(m+1)!}{x} = 0.$$

Следовательно, и

$$\lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = 0.$$

Равенство (11) указывает, что при $x \to \infty$ функция e^x возрастает быстрее, чем x^m, каким бы ни было, оставаясь конечным, m. Например, e^x возрастает быстрее, чем x^{1000}.

§ 7. СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ e^x

Рассмотрим теперь то свойство функции e^x, которое выделяет ее из всех показательных функций.

Определение 8. *Производной функции $f(x)$ называется предел*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{n}, \tag{1}$$

если этот предел существует.

Если точка движется прямолинейно и $f(x)$ обозначает путь, который проходит за время x, то $f(x+h)-f(x)$ обозначает путь, пройденный точкой за время $(x+h)-x$, а отношение

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

обозначает среднюю скорость за время h (с момента x). Естественно поэтому назвать $f'(x)$ скоростью в момент x. Более обобщенно, производную $f'(x)$ считаем скоростью изменения функции $f(x)$ относительно ее аргумента.

Пример. Пусть

$$f(x)=\frac{a}{2}x^2. \tag{2}$$

Тогда

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{a}{2}(x+h)^2-\frac{a}{2}x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a}{2}(2x+h)=ax.$$

Если материальная точка падает свободно, то формулой (2) определяется путь, пройденный точкой за время x. То, что $f'(x)=ax$, означает, что ax является скоростью свободно падающей материальной точки в момент x.

Теорема 7. *Скорость изменения функции e^x равняется e^x,* то есть

$$(e^x)'=e^x.$$

Доказательство. Сперва докажем, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1. \tag{3}$$

Действительно,

$$e^h=1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\dots,$$

$$\frac{(e^h-1)-h}{h}=\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\dots.$$

Поэтому

$$\left|\frac{e^h-1}{h}-1\right|<\frac{|h|}{2}+\frac{|h^2|}{2^2}+\frac{|h^3|}{2^3}+\ldots=\frac{\frac{|h|}{2}}{1-\frac{|h|}{2}}.$$

Отсюда, если $|h|\to 0$, получаем равенство (3).
Теперь имеем:

$$(e^x)'=\lim_{|h|\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{|h|\to 0}e^x\frac{e^h-1}{h}=e^x\lim_{|h|\to 0}\frac{a^h-1}{h}=e^x.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Поскольку $a^x=e^{x\ln a}$, то

$$a^x=1+\frac{x\ln a}{1}+\frac{(x\ln a)^2}{2!}+\ldots+\frac{(x\ln a)^n}{n!}+\ldots.$$

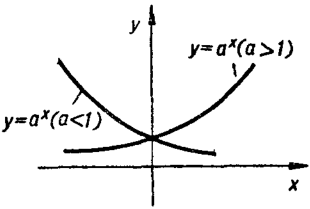


Рис. 4

Отсюда $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$.

Следовательно, если $a>1$, то $(a^x)'>0$ — функция возрастает, а если $a<1$, то функция убывает.

Замечание 2. Свойства показательной функции: существование, непрерывность, монотонность (возрастание при $a>1$, убывание при $a<1$) дают возможность построить график этой функции (рис. 4).

Отсюда очевидно существование логарифма каждого положительного числа по любому положительному основанию.

§ 8. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Как уже отмечалось, показательная функция имеет свойство

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y}.$$

Теорема, которую мы сейчас докажем, показывает, что это свойство является характеристическим для показательной функции.

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна и для всех действительных значений x, y имеет место тождество*

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y), \tag{1}$$

то функция, если она не есть тождественным нулем, показательная.

Доказательство. Пусть

$$f(1) = a.$$

Приняв в равенстве (1) $y = x$, получим:

$$f(2x) = [f(x)]^2.$$

Пусть теперь $y = 2x$. Имеем:

$$f(x) \cdot f(2x) = f(3x), \ f(3x) = [f(x)]^3.$$

Методом индукции делаем вывод: при целом положительном n

$$f(nx) = [f(x)]^n. \tag{2}$$

Действительно, если

$$f(kx) = [f(x)]^k,$$

то, на основании равенства (1),

$$f(\overline{k+1}x) = f(kx+x) = f(kx) \cdot f(x) = [f(x)]^{k+1}.$$

Приняв в равенстве (2) $x = 1$, получим:

$$f(n) = [f(1)]^n = a^n, \tag{3}$$

а если принять $x = \frac{m}{n}$, то

$$f(m) = \left[f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n.$$

Следовательно,

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = [f(m)]^{\frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}. \tag{4}$$

Пусть $x = y = 0$. Тогда из равенства (1) получим:

$$[f(0)]^2 = f(0). \tag{5}$$

Допущение, что $f(0) = 0$, нужно отбросить, иначе

$$f(x)\,f(-x) = f(0) = 0,$$

что невозможно. Тогда, согласно равенству (5):

$$f(0) = 1 = a^0.$$

Пользуясь равенством (1), находим:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot f\left(-\frac{m}{n}\right) = f(0) = 1.$$

Следовательно,

$$f\left(-\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{m}{n}\right)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}}. \tag{6}$$

Равенства (4) и (6) показывают, что равенство

$$f(r_k) = a^{r_k} \tag{7}$$

имеет место для каждого рационального r_k. Если α — иррациональное число, то существует последовательность рациональных чисел r_k такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} r_k = \alpha$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, то, согласно определению степени с иррациональным показателем, из равенства (7) вытекает:

$$\lim_{k \to \infty} f(r_k) = \lim_{k \to \infty} a^{r_k},$$

$$f(\alpha) = a^\alpha.$$

Теорема доказана.

Примечание. Уравнение (1) принадлежит к так называемым функциональным уравнениям. Такие уравнения рассматривал еще Л. Эйлер.

§ 9. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ $\sin x$, $\cos x$ В СТЕПЕННОЙ РЯД

Докажем сначала несколько важных утверждений.

Лемма 1. *Функции* $\cos x$, $\sin x$ *— непрерывные при каждом значении* x:

$$\lim_{x\to\alpha}\cos x=\cos\alpha,\quad \lim_{x\to\alpha}\sin x=\sin\alpha. \tag{1}$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1,\quad \lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

Доказательство. Действительно,

$$|\cos x-\cos\alpha|=2\left|\sin\frac{x+\alpha}{2}\right|\left|\sin\frac{x-\alpha}{2}\right|<2\cdot 1\,\frac{(x-\alpha)}{2}.$$

Следовательно, если

$$|x-\alpha|<\varepsilon,$$

то

$$|\cos x-\cos\alpha|<\varepsilon.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\alpha}\cos x=\cos\alpha.$$

Аналогично доказывается непрерывность $\sin x$.

Лемма 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доказательство. Возьмем $x<\frac{\pi}{2}$. Тогда (рис. 5), сравнивая площади треугольника OAB, сектора

$OAmP$ и треугольника ONP, которые равны соответственно $\frac{1}{2}\cos x \cdot \sin x$, $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, получим:

$$\cos x \cdot \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Поэтому

$$\frac{\sin x}{\cos x \sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x},$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

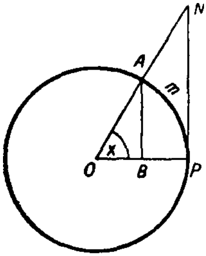


Рис. 5

Согласно лемме 1, имеем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

На основании доказанной леммы, можно вывести формулы:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Лемма 3 (формула Муавра).

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos n x + i \sin n x.$$

Доказательство. При $n = 1$ утверждение очевидно. Применим метод математической индукции:

$$(\cos x + i \sin x)^{n+1} = (\cos x + i \sin x)^n (\cos x + i \sin x) =$$

$$= (\cos n x + i \sin n x)(\cos x + i \sin x) = (\cos n x \cdot \cos x -$$

$$- \sin n x \cdot \sin x) + i (\sin n x \cos x + \cos n x \sin x) =$$

$$= \cos (n x + x) + i \sin (nx + x) =$$

$$= \cos (n + 1) x + i \sin (n + 1) x.$$

Лемма 4. При $n = 2k$ имеют место равенства:

$$\cos nz = \cos^n z - \frac{n(n-1)}{2} \cos^{n-2} z \sin^2 z + \ldots +$$

$$+ (-1)^k \sin^n z;$$

$$\sin nz = n\cos^{n-1}z\sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}z\sin^3 z +$$
$$+ \ldots + (-1)^{k-1} n\cos z\sin^{n-1}z.$$

Для доказательства достаточно сравнить результаты вычислений выражения $(\cos z + i\sin z)^n$ по формуле Муавра и по формуле Ньютона.

Теорема 9. *Для каждого значения* x

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots \quad (2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots . \quad (3)$$

Доказательство. Приняв $z = \frac{x}{n}$, согласно лемме 4, имеем:

$$\sin x = n\cos^{n-1}\frac{x}{n}\sin\frac{x}{n} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\frac{x}{n} \times$$
$$\times \sin^3\frac{x}{n} + \ldots + (-1)^{k-1} n\cos\frac{x}{n}\sin^{n-1}\frac{x}{n}.$$

Запишем последнее равенство так:

$$\sin x = n\cos^{n-1}\frac{x}{n}\sin\frac{x}{n} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\frac{x}{n}\sin^3\frac{x}{n} +$$
$$+ \ldots + (-1)^r \frac{n(n-1)\ldots(n-2r)}{(2r+1)!}\cos^{n-2r-1}\frac{x}{n}\sin^{2r+1}\frac{x}{n} +$$
$$+ S_{n,r}, \quad (4)$$

где

$$S_{n,r} = (-1)^{r+1}\frac{n(n-1)\ldots(n-2r-2)}{(2r+3)!}\cos^{n-2r-3}\frac{x}{n} \times$$
$$\times \sin^{2r+3}\frac{x}{n} + \ldots + (-1)^{k-1} n\cos\frac{x}{n}\sin^{n-1}\frac{x}{n}.$$

Оценим $S_{n,r}$. Отметим, что

$$\left|\cos\frac{x}{n}\right| < 1, \ \left|\sin\frac{x}{n}\right| < \frac{|x|}{n}.$$

Тогда

$$|S_{n,\,r}| < \frac{n(n-1)\ldots(n-2r-2)}{(2r+3)!}\cdot\frac{|x|^{2r+3}}{n^{2r+3}}+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-2r-4)}{(2r+5)!}\cdot\frac{|x|^{2r+5}}{n^{2r+5}}+\ldots+$$

$$+n\frac{|x|^{n-1}}{n^{n-1}}<\frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!}+\frac{|x|^{2r+5}}{(2r+5)!}+\ldots+\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}<$$

$$<\frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!}+\frac{|x|^{2r+5}}{(2r+5)!}+\ldots+\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots<$$

$$<\frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!}\left\{1+\frac{|x|^2}{(2r+4)^2}+\frac{|x|^4}{(2r+4)^4}+\ldots\right\}=$$

$$=\frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x^2}{(2r+4)^2}},$$

если

$$|x|<2r+4.$$

Из равенства (4) получим теперь

$$\left|\sin x-\left\{n\cos^{n-1}\frac{x}{n}\sin\frac{x}{n}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\frac{x}{n}\times\right.\right.$$

$$\times\sin\frac{3x}{n}+\ldots+(-1)^r\frac{n(n-1)\ldots(n-2r)}{(2r+1)!}\cos^{n-2r-1}\frac{x}{n}\times$$

$$\left.\left.\times\sin^{2r+1}\frac{x}{n}\right\}\right|<\frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!}:\left(1-\frac{x^2}{(2r+4)^2}\right).$$

Оставляя фиксированным r, перейдем к пределу при $n\to\infty$ Так как $1\geqslant\cos^{n-p}\frac{x}{n}=\left(1-\sin^2\frac{x}{n}\right)^{\frac{n-p}{2}}>\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n-p}{2}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n-p}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{-\frac{p}{2}}=$$

$$=e^{-\frac{x}{2}}\cdot e^{\frac{x}{2}}=1,\text{ то}$$

$$\lim_{n\to\infty} \cos^{n-p}\frac{x}{n} = 1 \text{ и } \lim_{n\to\infty} n(n-1)\ldots(n-s)\sin^{s+1}\frac{x}{n} = x^{s+1}.$$

Тогда $$\left|\sin x - \left\{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}\right| <$$
$$< \frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!} : \left(1 - \frac{x^2}{(2r+4)^2}\right).$$

Пусть теперь $r \to \infty$. Поскольку пределом правой части неравенства есть нуль (§ 2, равенство (2)), то

$$\sin x = x \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!} + \ldots.$$

Значит, равенство (2) доказано. Аналогично доказывается и равенство (3).

Замечание. Из равенств (2) и (3) получаем очень удобные для вычислений приближенные формулы:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \pm \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!},$$

$$\left(\text{погрешность} < \frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!}\right),$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^{2r}}{(2r)!},$$

$$\left(\text{погрешность} < \frac{|x|^{2r+2}}{(2r+2)!}\right).$$

Например,

$$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} \approx \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \approx 0{,}49 \text{ (а точно } \sin 30^\circ = 0{,}5).$$

Следует обратить внимание на аналогию приведенных рассуждений и рассуждений в параграфе 6. Такие рассуждения можно использовать для обоснования предельных переходов и в некоторых других задачах.

В дифференциальном (интегральном) исчислении разработаны общие методы разложения функций в степенные ряды. Там разложения в ряд функций e^x, $\cos x$, $\sin x$ находятся при помощи вычислений более простых, нежели наши, но эта простота базируется на ряде сложных теорем.

§ 10. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ С КОМПЛЕКСНЫМ АРГУМЕНТОМ. ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА. ЛОГАРИФМЫ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Определение понятия предела последовательности комплексных чисел

$$a_1 + b_1 i,\ a_2 + b_2 i,\ \ldots,\ a_n + b_n i \ldots,$$

а поэтому и определение понятия ряда

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \ldots + (a_n + b_n i) + \ldots \tag{1}$$

ничем не отличаются от определений в случае вещественных чисел.

Почти очевидно утверждение[1]:
сумма ряда (1) *равна* $a + bi$ *тогда и только тогда, когда*

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2}$$

и

$$b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots. \tag{3}$$

Рассмотрим ряд

$$1 + (xi) + \frac{(xi)^2}{2!} + \ldots + \frac{(xi)^n}{n!} + \ldots$$

(формально образованный из ряда e^x заменой x на xi) Для него рядом (2) есть

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots = \cos x,$$

---

[1] Для доказательства достаточно использовать соотношения:
$|\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leqslant |\alpha| + |\beta|$; $|\alpha + \beta i| \geqslant |\alpha|$, $|\alpha + \beta i| \geqslant |\beta|$.

а рядом (3) есть

$$x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots=\sin x.$$

Следовательно,

$$\cos x+i\sin x=1+(xi)+\frac{(xi)^2}{2!}+\ldots+\frac{(xi)^n}{n!}+\ldots. \qquad (4)$$

Теперь можно обобщить понятие степени, а следовательно, и понятие показательной функции, на случай невещественного показателя.

Определение 9. Символ e^{y+xi} означает:

$$e^{y+xi}=e^y\left\{1+(xi)+\frac{(xi)^2}{2!}+\ldots+\frac{(xi)^n}{n!}+\ldots\right\}. \qquad (5)$$

В частности,

$$e^{xi}=1+(xi)+\frac{(xi)^2}{2!}+\ldots+\frac{(xi)^n}{n!}+\ldots. \qquad (6)$$

Такое определение оправдано тем, что:

1) правая часть равенства (6) имеет целиком определенный смысл (см. (4)):

$$e^{xi}=\cos x+i\sin x; \qquad (7)$$

2) если $x=0$, то e^{y+xi}, согласно равенству (5), равняется e^y;

3) функция $f(z)=e^z$, где z — комплексное, удовлетворяет условию

$$f(z)\,f(u)=f(z+u), \qquad (8)$$

то есть характеристическое свойство показательной функции сохраняется и для комплексного показателя.

Пусть

$$z=y+xi,\ u=w+vi.$$

Тогда, согласно формулам (4), (7) и (5), будем иметь:

$$e^z = e^y(\cos x + i\sin x),\quad e^u = e^w(\cos v + i\sin v).$$

Следовательно,

$$e^z \cdot e^u = e^{y+w}[(\cos x\cos v - \sin x\sin v) + i(\cos x\sin v +$$
$$+ \sin x\sin v)] = e^{y+w}[\cos(x+v) + i\sin(x+v)] =$$
$$= e^{(y+w)+i(x+v)} = e^{z+u}.$$

Формула (7), так называемая **формула Эйлера**, есть одной из важнейших формул математики. Приводим некоторые следствия из этой формулы:

1. При $x = \pi$

$$e^{\pi i} = -1. \qquad (9)$$

(Этот результат будет использован при доказательстве трансцендентности числа π).

2. Если в формуле (7) x заменить на $-x$, то получим:

$$e^{-xi} = \cos^x - i\sin x. \qquad (7')$$

Сложим и вычтем равенства (7) и (7′).
Получим:

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2},\quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}. \qquad (10)$$

Эти формулы также называются формулами Эйлера, они имеют широкое применение.

Следует отметить, что из этих формул можно получить известную формулу:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

3. $$|\cos x + i\sin x| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1.$$

Следовательно,

$$|e^{xi}| = 1,\quad |e^{y+xi}| = e^y.$$

4. Как известно, каждое комплексное число $a+bi$ можно записать в тригонометрической форме:

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), \qquad (11)$$

где

$$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}.$$

Следовательно,

$$a+bi=re^{i\varphi}. \qquad (12)$$

Это так называемая **показательная форма** комплексного числа. Но изображение (11) — (12) комплексного числа есть только одним из возможных.

Действительно, так как

$$\cos(x+2k\pi)\equiv\cos x, \quad \sin(x+2k\pi)\equiv\sin x,$$

где k — целое число,

то формулы (11) и (12) можно заменить более общими:

$$a+bi=r[\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi)], \qquad (11')$$

где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

$$a+bi=re^{i(\varphi+2k\pi)}, \text{ где } k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots. \qquad (12')$$

5. Показательная формула комплексного числа дает возможность ввести понятие о логарифмах комплексных чисел.

Определение 10. *Натуральным логарифмом комплексного числа $a+bi$ называется каждое число $\alpha+\beta i$ такое, что*

$$e^{\alpha+\beta i}=a+bi.$$

Пишем $\ln N$, если N вещественное положительное число и логарифм определяется в обычном смысле. Если N — комплексное (вещественное или невещественное) число, то пишем $\operatorname{Ln} N$. Из (12') имеем:

$$a+bi=e^{\ln r}e^{i(\varphi+2k\pi)}=e^{\ln r+i(\varphi+2k\pi)}.$$

Поэтому

$$\operatorname{Ln}(a+bi) = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \text{ где } k = 0 \pm 1, \ldots . \qquad (13)$$

Следовательно, числа имеют бесчисленное множество логарифмов, $\ln r + i\varphi$ $(k=0)$ называется главным.

Если $a > 0$, а $b = 0$ ($N = a + bi$ — вещественное, положительное), то $\varphi = 0$ ($a = a(\cos 0 + i \sin 0)$) и главным логарифмом является $\ln r$. Таким образом, в школьном курсе рассматривается только один из логарифмов положительного числа — главный.

Если $a < 0$, а $b = 0$ ($N = a + bi$ — вещественное, отрицательное), то $\varphi = \pi$ ($a = |a|(\cos \pi + i \sin \pi)$), и главным логарифмом есть $\ln r + i\pi$ — невещественное число. Таким образом, школьное утверждение: «отрицательное число не имеет логарифма» следует уточнить: «все логарифмы отрицательного числа невещественные числа (действительного логарифма нет!)».

Отметим теперь, что достаточно найти главный логарифм числа, тогда все логарифмы того же числа найдем по формуле (13).

Упражнения

1. Согласно какому правилу составлена таблица (треугольник Паскаля)?

$$\begin{array}{l|llllll}
m=0 & 1 \\
m=1 & 1 & 1 \\
m=2 & 1 & 2 & 1 \\
m=3 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
m=4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
m=5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\end{array}$$

. . . .

Докажите, что в n-м ряде таблицы записаны биномиальные коэффициенты $1, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}, 1$.

2. Докажите равенство:

$$1 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^k + \ldots + 1 = 2^m.$$

3. Докажите тождества:

$$\cos^6 x + 3\cos^4 x \sin^2 x + 3\cos^2 x \sin^4 x + \sin^6 x \equiv 1$$

и

$$\cos^6 x - 3\cos^4 x \sin^2 x + 3\cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x \equiv \cos^3 2x$$

и обобщите их.

4. Пусть $a, b, c, \ldots, s$ обозначают n разных объектов. Каждое размещение этих объектов в определенном порядке называется их перемещением. Доказать, что число P_n всех возможных (разных) перемещений есть

$$P_n = n!$$

5. Соединением k объектов из n разных объектов $a, b, \ldots, s$ называется набор k объектов при условии, что каждых два набора, которые отличаются лишь порядком (например, abd и adb), считаются одинаковыми. Доказать, что число всех возможных (разных!) соединений k элементов из n есть C_n^k.

6. Используя результат упражнения (5), доказать формулу Ньютона, не обращаясь к методу математической индукции.

7. Доказать тождество:

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = A\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{n}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{2\pi}{n}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{m\pi}{n}}\right),$$

где A — постоянная относительно x величина, а $n = 2m + 1$.

Указание. Использовать формулу Муавра

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha,$$

формулу Ньютона и правило разложения многочлена на множители, если известны корни многочлена. При помощи леммы 2, § 9 доказать, что $A = n$.

8. $e^{\pi i} = -1$. Отсюда $e^{r\pi i} = 1$, $2\pi i = 0$. В чем ошибка?

9. Какое из двух чисел 119^{120} и 120^{119} больше?

10. Как известно, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} =$

$$= \ln a, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \ln \frac{a}{b}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

11. Допуская что $f(x)$ непрерывная функция, решить уравнение Эйлера:

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

12. Доказать, что

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

13. Если внести 1-го января в сберкассу 100 руб. (на срочный вклад), то на 1 января следующего года на счете будет 103 руб., через год $100 \cdot \left(1 \div \frac{3}{100}\right)^2$ руб. Подсчитать, с достаточной точностью, сколько денег станет на счете через 33 года после вклада.

14. За каждую $\frac{1}{n}$ часть года определенный коллектив из N человек увеличивается на $\frac{1}{n}$ своего первичного количества. Сколько человек будет в конце года? Может ли этот коллектив увеличиться за год в четыре раза?

15. Если внимательно рассмотреть таблицы 1, 2, 3, то станет понятно, как могло появиться число e и натуральные логарифмы.

Таблица 1

m	1	2	3	4	. . .	9	. .
$(1 + 0{,}001)^m \approx$	1,001	1,002	1,003	1,004	. .	1,009	. .

Таблица 2

m	1	2	. . .	19	.
$(1 + 0{,}00001)^m \approx$	1 000 01	1,000 02	. . .	1 000 19	. .

Таблица 3

m	0,000 01	0,000 02	. . .	0,000 19	. . .
$[(1+0{,}00001)^{100000}]^m \sim$	1,000 01	1,000 02	. . .	1,000 19	. . .

16. При помощи формул Эйлера для $\cos x$ и $\sin x$ доказать формулы

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

17. *Гиперболическими синусом и косинусом, соответственно, называют функции*

$$\operatorname{sh} u=\frac{e^u-e^{-u}}{2},\quad \operatorname{ch} u=\frac{e^u+e^{-u}}{2},$$

где u может быть и невещественным.

Вывести формулы:

$$\cos x=\operatorname{ch} ix;\quad i\sin x=\operatorname{sh} ix;$$

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1;$$

$$\operatorname{sh}(u+v)=\operatorname{sh} u\operatorname{ch} v+\operatorname{ch} u\operatorname{sh} v;$$

$$\operatorname{ch}(u+v)=\operatorname{ch} u\operatorname{ch} v+\operatorname{sh} u\operatorname{sh} v.$$

Глава III

ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ ЧИСЛА π

§ 1. ТЕОРЕМЫ О МНОГОЧЛЕНАХ

Теорема 1. *Тождество*

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+ \\ +\ldots+b_{n-1}x+b_n \qquad (1)$$

возможно тогда и только тогда, если коэффициенты многочленов при одинаковых степенях x одинаковы:

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_{n-1} = b_{n-1},\quad a_n = b_n. \qquad (2)$$

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость.

Приняв в тождестве (1) $x = 0$, получим

$$a_n = b_n,$$

и тогда

$$a_0x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x + a_{n-1} \equiv b_0x^{n-1} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}.$$

Опять приняв $x = 0$ (точнее, переходя к пределу при $x = 0$), будем иметь:

$$a_{n-1} = b_{n-1},$$

$$a_0x^{n-2} + \ldots + a_{n-3}x + a_{n-2} = b_0x^{n-2} + \ldots + b_{n-3}x + b_{n-2}$$

и т. д.

Теорема 2 (Безу). *Если число α является корнем многочлена*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (3)$$

то есть

$$0 \equiv a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n, \qquad (4)$$

то этот многочлен делится без остатка на $x - \alpha$.

Действительно, вычтя из равенства (3) тождество (4), получим

$$f(x) = a_0(x^n - \alpha^n) + a_1(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(x - \alpha).$$

Каждая из разностей $x^n - \alpha^n$, $x^{n-1} - \alpha^{n-1}$, $\ldots$, $x - \alpha$ делится без остатка на $x - \alpha$. Следовательно, и $f(x)$ делится без остатка на $x - \alpha$.

Теорема 3. *Каждый многочлен имеет не меньше чем один, вещественный или невещественный, корень.* Это так называемая основная теорема алгебры (мы ее приводим без доказательства).

Теорема 4. *Каждый многочлен n-й степени*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \tag{5}$$

имеет точно n корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (они могут быть вещественными и невещественными, среди них могут быть равные), при этом имеет место равенство

$$f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n). \tag{6}$$

В самом деле, согласно теореме 3, многочлен (5) имеет корень x_1 и, на основании теоремы Безу:

$$f(x) = (x - x_1)\,\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ есть многочлен $(n-1)$-й степени

$$\varphi(x) = a_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}.$$

Дальше снова, согласно теореме 3, будем иметь:

$$\varphi(x) = (x - x_2)\,\varphi_1(x),$$

где

$$\varphi_1(x) = a_0 x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + \ldots + c_{n-2}.$$

Следовательно,

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\,\varphi_1(x).$$

Тогда

$$\varphi_1(x) = (x - x_3)\,\varphi_2(x)$$

и т. д.

Будем считать равенство (6) доказанным. То, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть корни многочлена $f(x)$, очевидно, так как $f(x_i) = 0$.

Теорема 5 (формулы Виета). *Если* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *есть корни многочлена* (5), *то справедливы формулы*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\sum_{j \neq i} x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0}, \qquad (7)$$

$$\sum_{i \neq j \neq k} x_i x_j x_k = x_1 x_2 x_3 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_3}{a_0},$$

. . . .

$$x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Действительно, на основании теоремы 4 имеем тождество:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \equiv$$
$$\equiv a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Выполнив в правой части умножение и приведя подобные члены, получим:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \equiv$$
$$\equiv a_0 x^n + a_0 \left(-\sum_{i=1} x_i\right) x^{n-1} + a_0 \left(\sum_{i \neq j} x_i x_j\right) x^{n-2} + \ldots +$$
$$+ a_0 (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Отсюда, на основании теоремы 1, будем иметь формулы (7).

§ 2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Во многих вопросах алгебры значительную роль выполняют так называемые симметричные функции корней алгебраического уравнения. Например, при помощи таких функций доказывается теорема о невозможности решения в радикалах общего вида уравнения, выше четвертой степени. Некоторые элементарные факты теории симметричных функций мы используем для доказательства трансцендентности числа π.

Определение 1. *Функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *n переменных называется симметричной, если она не изменяется при любой перестановке ее аргументов.*

Например, функции

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}, \quad \cos(x_2 - x_1)$$

симметричны, а функции

$$x_1 + x_2^2, \quad x_1x_3 + x_2, \quad \sin(x_2 - x_1)$$

несимметричны.

Определение 2. *Элементарными симметричными функциями n переменных называются выражения*

$$p_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$p_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \sum_{i,\,j} x_ix_j, \quad \text{где} \quad i \neq j. \qquad (1)$$

$$p_3 = x_1x_2x_3 + \ldots + x_kx_rx_s + \ldots = \sum_{k,\,r,\,s} x_kx_rx_s \quad k \neq r \neq s,$$

$$p_n = x_1x_2 \ldots x_n.$$

В алгебре рассматривают и тот случай, когда функция изменяется при перестановках аргументов, но при определенных числовых значениях аргументов их перестановка не изменяет числового значения функции. Например, функция $x_1^2 + x_2x_3 + x_4^2$ не является симметричной в понимании определения 1, но при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = a$ значение функции не изменится, если произвольно переставить ее аргументы.

Дальше будем придерживаться определения 1 и рассматривать только те значения симметричных функций, которые они имеют при $x_1, x_2, \ldots, x_n$ корнях уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0. \tag{2}$$

Короче будем говорить — симметричные функции корней уравнения.

Теорема 6. *Если коэффициенты уравнения* (2) *целые числа и* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *его корни, то элементарные симметричные функции величины* $a_0x_1, a_0x_2, \ldots, a_0x_n$ *есть целые числа.*

Действительно, согласно формулам Виета, имеем:

$$a_0x_1 + a_0x_2 + \ldots + a_0x_n = a_0(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = -a_1,$$

$$(a_0x_1)(a_0x_2) + \ldots + (a_0x_{n-1})(a_0x_n) = a_0^2(x_1x_2 \ldots x_{n-1}x_n) = a_0a_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(a_0x_1)(x_0x_2) \ldots (a_0x_n) = a_0^n x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n a_0^{n-1} a_n.$$

§ 3. ОСНОВНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ФУНКЦИИ, ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА

Элементарные симметричные функции на основании формул Виета очень просто определяются через коэффициенты соответствующего многочлена.

Такое свойство имеют и некоторые другие симметричные функции корней многочлена.

Определение 3. *Основными симметричными функциями, или степенными суммами, называются функции:*

$$\begin{aligned}
s_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n,\\
s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,\\
s_3 &= x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
s_n &= x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n.
\end{aligned} \tag{1}$$

Теорема 7. *Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются корнями многочлена*

$$F(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n, \tag{2}$$

то справедливы соотношения:

$$\begin{gathered} s_1 + b_1 = 0, \\ s_2 + s_1 b_1 + 2b_2 = 0, \\ s_3 + s_2 b_1 + s_1 b_2 + 3b_3 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{n-1} + s_{n-2}b_1 + s_{n-3}b_2 + \ldots + s_1 b_{n-2} + (n-1)\, b_{n-1} = 0, \\ s_n + s_{n-1}b_1 + s_{n-2}b_2 + \ldots + s_1 b_{n-1} + nb_n = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

из которых последовательно получаем формулы Ньютона:

$$\begin{gathered} s_1 = -b_1, \\ s_2 = b_1^2 - 2b_2, \\ s_3 = -b_1^3 + 3b_1 b_2 - 3b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{4}$$

Чтобы доказать справедливость формул (3), введем обозначения:

$$\begin{gathered} \omega_1(x) = x + b_1, \\ \omega_2(x) = x^2 + b_1 x + b_2, \\ \omega_3(x) = x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_{n-1}(x) = x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}. \end{gathered}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_1(x_i) = s_1 + nb_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_2(x_i) = s_2 + b_1 s_1 + nb_2, \tag{5}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{n-1}(x_i) = s_{n-1} + b_1 s_{n-2} + b_2 s_{n-3} + \dots + b_{n-2} s_1 + nb_{n-1}.$$

Вычислим двумя способами сумму:

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{x - x_1} + \frac{F(x)}{x - x_2} + \dots + \frac{F(x)}{x - x_n}.$$

Поскольку $x_1, x_2, \dots, x_n$ являются корнями многочлена $F(x)$, то

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) \tag{6}$$

и поэтому

$$\varphi(x) = (x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3)\dots \\ \dots(x - x_n) + \dots + (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1}).$$

Отсюда, после умножения и приведения подобных членов, на основании формул Виета, получим:

$$\varphi(x) = nx^{n-1} + (n-1)b_1 x^{n-2} + (n-2)b_2 x^{n-3} + \dots + \\ + b_{n-1}. \tag{7}$$

С другой стороны, согласно правилу деления $\left(\text{вычисляем } \frac{F(x)}{x - x_i}\right)$, имеем:

$$\begin{array}{l|l}
x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n & x - x_i \\
\cline{2-2}
\underline{\quad x^n - x_i x^{n-1} \quad} & x^{n-1} + \omega_1(x_i)x^{n-2} + \\
(b_1 + x_i)x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots & +\omega_2(x_i)x^{n-3} + \dots + \\
 & + \omega_{n-1}(x_i)
\end{array}$$

$$\frac{\omega_1(x_i)\,x^{n-1} - x_i(x_i + b_1)\,x^{n-2} + \dots}{(x_i^2 + x_i b_1 + b_2)\,x^{n-2} + b_3 x^{n-3} + \dots}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Поэтому

$$\varphi(x) = nx^{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_1(x_i)\right) x^{n-2} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_2(x_i)\right) x^{n-3} + \dots + \sum_{i=1}^{n} \omega_{n-1}(x_i). \tag{8}$$

Применяя теорему 1, из равенств (7) и (8) определяем:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_1(x_i) = (n-1)\,b_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_2(x_i) = (n-2)\,b_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{n-1}(x_i) = b_{n-1}.$$

Эти равенства вместе с равенствами (5) приводят к первым $(n-1)$ равенствам (3). Что касается последнего из равенств (3), то оно получается так:

$$F(x_i) = x_i^n + b_1 x_i^{n-1} + \dots + b_{n-1} x_i + b_n \equiv 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \tag{9}$$

так как x_i есть корень многочлена $F(x)$. Сложив все тождества (9), получим

$$s_n + b_1 s_{n-1} + \dots + b_{n-1} s_1 + b_n = 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Из тождеств (9) можно вывести тождества:

$$x_i^k F(x_i) \equiv x_i^{n+k} + b_1 x_i^{n+k-1} + \ldots + b_{n-1} x_i^{k+1} + b_n x_i^n \equiv 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots n.$$

Сложение этих тождеств (при $k = 1, 2 \ldots$) приводит к равенствам

$$s_{n+1} + b_1 s_n + \ldots + b_{n-1} s_2 + b_n s_1 = 0,$$
$$s_{n+2} + b_1 s_{n+1} + \ldots + b_{n-1} s_3 + b_n s_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Эти равенства вместе с формулами (4) дают возможность определить степенные суммы $s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ через коэффициенты многочлена $F(x)$. Аналогично можно вычислить степенные суммы:

$$s_{-1} = x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1},$$
$$s_{-2} = x_1^{-2} + x_2^{-2} + \ldots + x_n^{-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

если среди корней многочлена $F(x)$ нет нулей $(b_n \neq 0)$.

Из этой теоремы вытекают непосредственно два следствия.

Следствие 1. *Если коэффициенты многочлена* (2) *есть целые числа, то степенные суммы корней этого многочлена, то есть величины* $s_1, s_2, \ldots,$ *тоже целые числа.*

Следствие 2. *Если коэффициенты многочлена*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

есть целые числа, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *являются корнями этого многочлена, то сумма одинаковых степеней чисел* $a_0 x_1, a_0 x_2, \ldots, a_0 x_n$ *также целое число.*

В самом деле, если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются корнями многочлена, то они являются также корнями многочлена

$$x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_0} x + \frac{a_n}{a_0},$$

и поэтому, согласно формулам (4), имеем

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \frac{a_1^2}{a_0^2} - 2\frac{a_2}{a_0},$$

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = -\frac{a_1^3}{a_0^3} + 3\frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_0} - \frac{3a_3}{a_0},$$

. . . .

Следовательно,

$$a_0x_1 + a_0x_2 + \ldots + a_0x^n = -a_1,$$

$$(a_0x_1)^2 + (a_0x_2)^2 + \ldots + (a_0x_n)^2 = a_1^2 - 2a_0a_2,$$

$$(a_0x_1)^3 + (a_0x_2)^3 + \ldots + (a_0x_n)^3 = -a_1^3 + 3a_0a_1a_2 - 3a_3a_0^2,$$

. . . .

Наиболее важным для нас выводом из формул Ньютона является утверждение:

Теорема 8. *Если симметричная функция $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ есть многочлен и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются корнями многочлена* (2), *то*

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

где φ — многочлен. Если коэффициенты многочлена $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — целые числа, то коэффициенты многочлена $\varphi(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ также целые числа.

Для доказательства теоремы отметим, что если многочлен $\Phi(y_1, \ldots, y_n)$ содержит слагаемое Ay_k, то, вследствие симметричности, он обязательно содержит слагаемые $Ay_1, Ay_2, \ldots, Ay_n$ и никаких других слагаемых первой степени он содержать не может. Так же, если $\Phi(y_1, \ldots, y_n)$ содержит слагаемые вида By_ky_l, Cy_k^2, то он содержит и слагаемые $By_1y_2, \ldots, By_{n-1}y_n, Cy_1^2, \ldots, Cy_n^2$ и никаких других слагаемых второй степени не содержит. То же самое можно сказать и о слагаемых каждой степени.

Следовательно, если $\Phi(y_1, \ldots, y_n)$ — симметричный многочлен, то он имеет вид:

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = A_0 + A_1 \sum_{k=1}^{n} y_k + A_2 \sum_{k \neq l} y_k y_l +$$
$$+ A_2^1 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + A_3 \sum_{k \neq l \neq m} y_k y_l y_m + \ldots$$

Поэтому

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_0 + A_1 \sum_{k=1}^{n} x_k + A_2 \sum_{k \neq l} x_k x_l +$$
$$+ A_2^1 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + A_3 \sum_{k \neq l \neq m} x_k x_l x_m + \ldots$$

Согласно формулам (4), находим:

$$\sum x_k = s_1 = -b_1,$$

$$2 \sum_{k \neq l} x_k x_l = x_1 (x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_1) + x_2 (x_1 + x_2 +$$
$$+ \ldots + x_n - x_2) + \ldots + x_n (x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_n) =$$
$$= s_1 (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = s_1^2 -$$
$$- s_2 = b_1^2 - (b_1^2 - 2b_2) = 2b_2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = s_2 = b_1^2 - 2b_2,$$

$$\sum_{k \neq l} x_k x_l^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - x_k^2) = \sum_{k=1}^{n} x_k (s_2 - x_k^2) =$$
$$= s_2 \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k^3 = s_1 s_2 - s_3 = -b_1 (b_1^2 - 2b_2) -$$
$$- (-b_1^3 + 3b_1 b_2 - 3b_3) = 3b_3 - b_1 b_2.$$

Выполняя такие вычисления и дальше, мы убедимся в справедливости доказываемой теоремы. Из доказанной теоремы и следствия 2 теоремы 7 вытекает следующее утверждение.

Теорема 9. *Если* $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — *симметричный многочлен с целыми коэффициентами и* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — *корни многочлена*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

то

$$\Phi(a_0x_1, a_0x_2, \ldots, a_0x_n)$$

целое число.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ π

Докажем вначале три леммы.

Лемма 1. Для каждого целого положительного r и каждого значения x имеет место равенство

$$r!e^x = r! + r!x + \frac{r!}{2!}x^2 + \ldots + \frac{r!}{(r-1)!}x^{r-1} + x^r + \\ + x^{r+1}q_re^{|x|}, \quad (1)$$

где

$$q_r = q_r(x), \ |q_r| < 1.$$

Используем известное уже равенство

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^r}{r!} + \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} + \frac{x^{r+2}}{(r+2)!} + \ldots,$$

из которого получим:

$$r!e^x = r! + r!x + \frac{r!}{2!}x^2 + \ldots + \frac{r!}{(r-1)!}x^{r-1} + \\ + x^r + x^{r+1}\delta(x, r),$$

где

$$\delta(x, r) = \frac{1}{r+1} + \frac{x}{(r+1)(r+2)} + \frac{x^2}{(r+1)(r+2)(r+3)} + \ldots$$

Поскольку

$$|\delta(x, r)| < 1 + \frac{|x|}{1.2} + \frac{|x|^2}{1.2.3} + \ldots < 1 + |x| + \frac{|x|^2}{1.2} + \\ + \frac{|x|^3}{1.2.3} + \ldots = e^{|x|},$$

то можно принять, что

$$\delta(x, r) = q_r(x) e^{|x|}, \quad |q_r| < 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n,$$

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \ldots + f^{(n)}(x),$$

где

$$f'(x) = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots + nC_n x^{n-1},$$

$$f''(x) = 2C_2 + 3 \cdot 2C_3 x + \ldots + n(n-1) C_n x^{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n-1)}(x) = (n-1)!\, C_{n-1} + n!\, C_n x,$$

$$f^{(n)}(x) = n!\, C_n.$$

Тогда

$$Pe^x = e^{|x} Q(x) + F(x), \tag{2}$$

где

$$P = C_0 + 1!C_1 + 2!C_2 + \ldots + n!C_n = \sum_{r=0}^{n} C_r r!, \tag{3}$$

а

$$Q(x) = \sum_{r=0}^{n} C_r q_r x^{r+1}, \quad q_r = q_r(x), \quad |q_r| < 1. \tag{4}$$

Для доказательства леммы запишем, на основании (1), такие равенства:

$$e^x = 1 + xq_0e^{|x|}, \qquad (r = 0)$$

$$e^x = 1 + x + x^2q_1e^{|x|}, \qquad (r = 1)$$

$$2!e^x = 2! + 2x + x^2 + x^3q_2e^{|x|}, \qquad (r = 2)$$

. . . .

$$n!e^x = n! + n!x + \frac{n!}{2!}x^2 + \ldots + nx^{n-1} + x^n + x^{n+1}q_ne^{|x|} \qquad (r = n).$$

Умножив эти равенства, соответственно, на $C_0, C_1, \ldots, C_n$ и сложив результаты, получим равенство (2).

Лемма 3. *Сумма и произведение двух алгебраических чисел есть алгебраические числа (к тому же целые алгебраические, если таковыми являются слагаемые и сомножители).*

Пусть $\alpha = \alpha_1$ есть алгебраическое число — корень некоторого уравнения n-й степени с рациональными коэффициентами и пусть $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — остальные корни того же уравнения. Аналогично, пусть $\beta = \beta_1$ есть корень некоторого уравнения m-й степени с рациональными коэффициентами, а $\beta_2, \ldots \beta_m$ — остальные корни этого уравнения.

Произведение всех разностей вида $x - \alpha_i \beta_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, очевидно, есть многочлен (степени mn), один из корней которого $\alpha\beta$. Следовательно, достаточно доказать, что коэффициентами этого многочлена являются рациональные числа. Это действительно так, ибо коэффициенты эти являются симметричными функциями от аргументов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ и поэтому, применив дважды теорему 9, придем к нужному выводу. Таким образом, произведение двух алгебраических чисел есть алгебраическое число. Аналогично доказывается утверждение о сумме алгебраических чисел.

Теорема 10. Число π — трансцендентное.

Допустим обратное. Пусть π — алгебраическое число. Согласно лемме 3, число πi также алгебраическое, то есть оно является корнем уравнения вида[1]

$$p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0 \qquad (5)$$

с целыми коэффициентами. Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ — корни этого уравнения, один из которых есть πi.

Поскольку $e^{\pi i} = -1$ (см. разд. II, § 10), то

$$(e^{\beta_1} + 1)(e^{\beta_2} + 1) \ldots (e^{\beta_m} + 1) = 0. \qquad (6)$$

Раскрыв скобки в левой части этого равенства, имеем:

$$1 + \sum_{k=1}^{m} e^{\beta_k} + \sum_{k,\,e} e^{\beta_k + \beta_e} + \ldots + e^{\beta_1 + \beta_2} + \ldots + \beta_m = 0. \qquad (7)$$

Обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ те из показателей β_k, $\beta_k + \beta_e, \ldots, \beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_m$, которые отличны от нуля, а через $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_N$ остальные[2] показатели (они равняются нулю). Присоединив соответствующие слагаемые (единицы) в левой части (7) к первому слагаемому, запишем (7) так:

$$K + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \ldots + e^{\alpha_n} = 0, \qquad (8)$$

где K — целое положительное число.

Числа $p_0\beta_1, p_0\beta_2, \ldots, p_0\beta_m$ есть целые алгебраические. Поэтому (лемма 3) целыми алгебраическими являются и числа $p_0\alpha_1, p_0\alpha_2, \ldots$.

Следует отметить, что если $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ симметричный многочлен с целыми коэффициентами, то $F(p_0\alpha_1, \ldots, p_0\alpha_n)$ — целое число.

---

[1] Из всех таких уравнений рассматривается уравнение наименьшей степени — неприводимое уравнение.

[2] Один такой показатель, очевидно, имеется, так как если уравнение (5) имеет корень πi, то оно имеет также корень $-\pi i$.

Действительно, если

$$F(p_0\alpha_1, \ldots, p\alpha_n) = a + b\sum_{k=1}^{n}\alpha_k + c\sum_{\substack{k,\, l=1}}^{\substack{l=n\\k=n}}\alpha_k\alpha_l + \ldots,$$

то

$$F(p_0\alpha_1, \ldots, p_0\alpha_n) = a + b\sum_{k=1}^{N}\alpha_k + c\sum_{k,\, l}^{\substack{l=N\\k=N}}\alpha_k\alpha_l + \ldots, \tag{9}$$

так как каждая сумма в правой части второго из этих равенств отличается от соответствующей суммы в правой части первого равенства или слагаемыми, которые равняются $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_N$, или слагаемыми, в которые $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_N$ входят как множители, а числа $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_N$ равняются нулю.

Выражение в правой части (9) есть симметричный многочлен относительно $p_0\alpha_1, p_0\alpha_2, \ldots, p_0\alpha_N$, следовательно и относительно $p_0\beta_1, \ldots, p_0\beta_m$. Согласно теореме 9 теперь можно сделать вывод, что $F(p_0\alpha_1, \ldots, p_0\alpha_n)$ — целое число.

Приняв последовательно в равенстве (2) $x = 0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, получим:

$$P = F(0),$$

$$Pe^{\alpha_1} = e^{|\alpha_1|}Q(\alpha_1) + F(\alpha_1),$$

$$Pe^{\alpha_2} = e^{|\alpha_2|}Q(\alpha_2) + F(\alpha_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Pe^{\alpha_n} = e^{|\alpha_n|}Q(\alpha_n) + F(\alpha_n).$$

Умножив первое равенство на K и сложив все эти равенства, на основании равенства (8), имеем:

$$0 = \{KF(0) + F(\alpha_1) + \ldots + F(\alpha_n)\} +$$
$$+ [e^{|\alpha_1|}Q(\alpha_1) + \ldots + e^{|\alpha_n|}Q(\alpha_n)]. \tag{10}$$

Если теперь докажем, что для некоторого многочлена $f(x)$ (согласно которому построена $F(x)$) равенство (10) невозможно, если $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — алгебраические числа, то тем самым будет доказана трансцендентность числа π.

Нужный нам многочлен $f(x)$ построим таким способом:

$$f(x) = \frac{p_0^{nt+t-1} x^{t-1} (x-\alpha_1)^t (x-\alpha_2)^t \ldots (x-\alpha_n)^t}{(t-1)!}, \qquad (11)$$

где t — простое число, которое пока что не определено.

Многочлен (11) запишем так:

$$f(x) = \frac{A_{t-1}x^{t-1} + A_t x^t + \ldots}{(t-1)!},$$

$$f(x) = \frac{B_t p_0{}^t (x-\alpha_1)^t + B_{t+1} p_0^{t+1} (x-\alpha_1)^{t+1} + \ldots}{(t-1)!}, \qquad (12)$$

$$f(x) = \frac{C_t p_0^t (x-\alpha_2)^t + C_{t+1} p_0^{t+1} (x-\alpha_2)^{t+1} + \ldots}{(t-1)!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Первое из равенств (12) получим, если в (11) раскроем скобки. При этом

$$A_{t-1} = (-1)^n p_0^{t-1} (p_0\alpha_1)^t (p_0\alpha_2)^t \ldots (p_0\alpha_n)^t,$$

то есть A_{t-1} является симметричным относительно $p_0\alpha_1, \ldots, p_0\alpha_n$ и поэтому оно — целое число. Так же можно убедиться в том, что целыми являются и коэффициенты $A_t, \ldots$

Второе из равенств (12) получим, если перепишем (11) так:

$$f(x) = \frac{p_0^{nt+t-1} [(x-\alpha_1)+\alpha_1]^{t-1} (x-\alpha_1)^t [(x-\alpha_1) +}{(t-1)!}$$

$$\frac{+ (\alpha_1-\alpha_2)]^t + \ldots}{(t-1)!},$$

а потом освободимся от квадратных скобок. Аналогично получим и остальные равенства (12). При этом следует обратить внимание на то, что $B_t, B_{t+1}, \ldots; C_t, C_{t+1}, \ldots$ есть многочлены с целыми коэффициентами относительно $p_0\alpha_1, p_0\alpha_2, \ldots$. На основании определения функции $F(x)$ можно проверить, что

$$F(0) = A_{t-1} + tA_t + (t+1)tA_{t+1} + \ldots,$$
$$F(\alpha_1) = tB_t p_0^t + (t+1)tB_{t+1}p_0^{t+1} + \ldots,$$
$$F(\alpha_2) = tC_t p_0^t + (t+1)tC_{t+1}p_0^{t+1} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Отсюда вытекает, что сумма

$$F(\alpha_1) + F(\alpha_2) + \ldots + F(\alpha_n)$$

делится на t. Эта сумма, кроме того, является симметричным многочленом относительно $p_0\alpha_1, p_0\alpha_2, \ldots, p_0\alpha_n$ с целыми коэффициентами (так как симметричным есть $f(x)$) и поэтому она есть целое число.

Будем считать t большим каждого из целых чисел K, $p_0, (p_0\alpha_1), (p_0\alpha_2) \ldots (p_0\alpha_n)$. Тогда число

$$KF(0) = KA_{t-1} + KtA_t + \ldots \tag{13}$$

является целым, которое не делится на t, ибо таким есть KA_{t-1}, а остальные слагаемые в правой части (13) делятся на t.

Следовательно, в правой части равенства (10) выражение в фигурных скобках не делится на t и является целым числом, причем это отличное от нуля целое число.

Рассмотрим сумму

$$L = e^{|\alpha_1|}Q(\alpha_1) + e^{|\alpha_2|}Q(\alpha_2) + \ldots + e^{|\alpha_n|}Q(\alpha_n).$$

Так как (см. (4))

$$Q(x) = \sum_{r=0}^{n} C_r q_r x^{r+1}, \quad |q_r| < 1,$$

где C_r — коэффициенты многочлена $f(x)$, то, на основании равенства (11), будем иметь:

$$Q(x) = \frac{A_{t-1}q_{t-1}x^{t-1} + A_t q_t x^t + \ldots}{(t-1)!}.$$

Следовательно,

$$|Q(x)| \leqslant \frac{|A_{t-1}|\,|x|^{t-1} + |A_t|\,|x|^t + \ldots}{(t-1)!}. \tag{13}$$

Так как (см. (2), разд. II, § 2)

$$\lim_{m \to \infty} \frac{|x|^{m+s}}{m!} = |x|^s \lim_{m \to \infty} \frac{|x|^m}{m!} = 0$$

и число слагаемых в правой части равенства (13) конечное, то

$$\lim_{t \to \infty} |Q(x)| = 0.$$

Следовательно, для $0 < \varepsilon < 1$ и достаточно большого t получим

$$e^{|\alpha_r|}\,|(Q(\alpha_r)) < \frac{\varepsilon}{n},$$

а тогда

$$|L| < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon\,(< 1).$$

Таким образом, в равенстве (10) правая часть является суммой целого числа, отличного от нуля, и числа, меньшего по модулю, чем единица.

Такая сумма не может равняться нулю, и равенство (10) при нашем выборе $f(x)$ и t невозможно. Трансцендентность числа π доказана.

Упражнения

1. Доказать, что если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — симметричный многочлен первой степени, свободный член которого равен нулю, и

$$f(x_1 + \alpha, x_2 + \alpha, \ldots, x_n + \alpha) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \alpha,$$

то

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_1}{n}.$$

2. Составить квадратное уравнение с корнями $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, где x_1, x_2, x_3 есть корни уравнения

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

3. Доказать, что условие $a^4(a^2 - 2b) = 2(a^2 - 2ab + 2c)^2$ является необходимым и достаточным для того, чтобы квадрат одного из корней уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

был суммой квадратов остальных двух его корней.

Указание. $2x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

4. Доказать, что если синусы трех углов треугольника являются корнями уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

то

$$a(4ab - a^3 - 8c) = 4c^2.$$

Указание. Рассмотреть треугольник, подобный данному, вписанный в круг радиуса $\frac{1}{2}$.

5. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть корни многочлена

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Результантом многочлена $f(x)$ и многочлена

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$$

называется выражение

$$R(f, g) = a_0^m g(x_1) g(x_2) \ldots g(x_n).$$

Доказать, что

$$R(f, g) = (-1)^{mn} R(g, f).$$

Указание. Использовать разложение $g(x)$ на множители.

6. Является ли условие $R(f, g) = 0$ достаточным для того, чтобы многочлены $f(x)$, $q(x)$ имели хотя бы один общий корень? Чтобы их графики пересекались?

7. Доказать, что $R(f, g)$ является симметричным многочленом относительно корней каждого из многочленов f, g и сделать вывод о связи $R(f, g)$ с коэффициентами многочленов.

8. Доказать, что если

$$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, \quad g(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2,$$

то

$$R(f, g) = (a_0b_2 - a_2b_0)^2 - (a_1b_0 - a_0b_1)(a_1b_2 - a_2b_1).$$

9. Найти результант многочленов

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad f'(x) = 2ax + b.$$

Ответ. $b^2 - 4ac$.

10. Найти $R(f, f')$, если $f(x) = x^3 + px + q$, $f'(x) = 3x^2 + p$.

Ответ.

$$-4p^3 - 27q^2 = -4 \cdot 27 \cdot \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right).$$

11. Длины боковых сторон треугольника являются корнями уравнения

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

Вычислить радиус описанной окружности и площадь треугольника.

Ответ.

$$R = \frac{c}{\sqrt{a(4ab - a^3 - bc)}}, \quad S = \frac{1}{4}\sqrt{a(4ab - a^3 - bc)}.$$

Оглавление

Дринфельд Гершон Ихелевич

Квадратура круга
и трансцендентность числа π

Библиотечка
физико-математической школы

Издательское объединение «Вища школа»
Головное издательство

Редактор *Г. Ф. Трофимчук*
Художественный редактор *И. Р. Ойхман*
Технический редактор *М. И. Ефимова*
Корректор *А. И. Кирова*

Сдано в набор 20.08.1975 г. Подписано к печати 17.03.1976 г. Формат бумаги $70 \times 108^1/_{32}$. Бумага тип. № 1. Физ. печ. л. 2,625. Усл. печ. л. 3,67. Уч.-изд. л. 3,14. Тираж 13 000. Изд. № 2083. БФ 15834. Цена 10 коп. Зак. 5-2210.

Отпечатано с матриц Харьковской книжной фабрики «Коммунист» республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР. Харьков, ул. Энгельса, 11 в Харьковской городской типографии № 16 Областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Харьков-3, Университетская, 16. Зак. № 751.

XP-2